Etudier le signe d'une expression du second degré à partir d'une expression factorisée

Pré-requis : savoir donner le signe d'une expression du premier degré 😉

On reconnaît une expression du second degré factorisée sous une des deux formes suivantes :

$$a(x - x_1)(x - x_2) \quad ou \quad (ax + b)(cx + d)$$

La méthode algébrique permettant de retrouver le signe d'une expression factorisée du second degré est la suivante :

- ✓ On recherche les racines (les valeurs qui annulent l'expression) en résolvant une équation produit-nul.

- ✓ On construit un tableau de signes, en indiquant dans la première ligne chaque racine, par ordre croissant ;
  ensuite on construit une ligne par facteur **+ une ligne pour le coefficient a,**
  si la factorisation est sous la première forme proposée, et que a est négatif.

- ✓ On complète chaque ligne avec « étudier le signe d'une expression du premier degré ».

- ✓ On ajoute une dernière ligne « signe du produit » que l'on complètera en utilisant la règle des signes (rappel : le produit de deux nombres de même signe est positif, le produit de deux nombres de signe contraire est négatif).

Bien entendu avant de conclure, on prend soin de relire la question de départ, afin de formuler la réponse sous la forme attendue.

Voici quatre exemples (voir pages suivantes) :

1°) On donne $A(x) = 2(x+3)(x-4)$.
Etudier le signe de $A(x)$.

Réponse :

Je recherche les racines :

$2(x+3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0$ ou $x-4=0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 4$

Les racines sont -3 et 4.

Je construis le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :

$A(x)$ est positif en dehors de ses racines, négatif entre ses racines.

Ou encore :

$A(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -3]$ et sur $[4; +\infty[$

$A(x) \leq 0$ sur $[-3; 4]$

2°) On donne $B(x) = -5(x-2)(x+8)$.
Préciser sur quel(s) intervalle(s) $B(x) > 0$.

Réponse :

Je recherche les racines :

$-5(x-2)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$ ou $x+8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -8$

Les racines sont -8 et 2.

Je construis le tableau de signes :

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de -5		$-$	|	$-$	|	$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

$B(x)$ est positif entre de ses racines, négatif en dehors de ses racines.

Ou encore :

$A(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -8]$ et sur $[2; +\infty[$

$A(x) \geq 0$ sur $[-8; 2]$

Pour répondre à la question :

$B(x) > 0$ sur $]-8\,; 2[$

1°) On donne $C(x) = (2x+6)(3-5x)$.
Etudier le signe de $C(x)$.

Réponse :

Je recherche les racines :

$(2x+6)(3-5x) = 0 \Leftrightarrow 2x+6 = 0$ ou $3-5x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -6$ ou $5x = 3$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 0{,}6$

Les racines sont -3 et $0{,}6$.

Je construis le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$0{,}6$		$+\infty$
Signe de $2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

$C(x)$ est négatif en dehors de ses racines,
positif entre ses racines.

Ou encore :

$C(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -3]$ et sur $[0{,}6; +\infty[$

$C(x) \geq 0$ sur $[-3; 0{,}6]$

4°) à toi de jouer 😉

Etudie le signe de $D(x) = (2-5x)(-x-4)$

Réponse finale attendue :

$D(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -4]$ et sur $[0{,}4; +\infty[$

$D(x) \leq 0$ sur $[-4; 0{,}4]$