

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Avez-vous bien présents à l'esprit les ensembles de nombres ? Au cas où, les voici :

L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N}

qui est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z}

qui est inclus dans l'ensemble des nombre décimaux \mathbb{D}

qui est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q}

qui est inclus dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R}



Vidéo Yvan Monka

On peut toujours envisager la construction d'un nouvel ensemble de nombres car l'ensemble de nombre précédent rendait impossible un type de manipulations mathématiques.

Par exemple, la soustraction n'est pas toujours possible dans \mathbb{N} ...

L'ensemble réel semble donc être le plus grand ensemble de nombres connu, ensemble dans lequel tout est possible... Tout ?

Non, il y existe un type d'équation qui n'admet aucune solution réelle. Essayez donc :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul

$$x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

L'équation $x^2 - 1 = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} :

$$\{-1 ; 1\}$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Cette équation n'admet aucune solution dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .



Et si nous pouvions rendre cette équation résolvable ? Avec, pourquoi pas, de nouveaux nombres ?

Imaginons... il faudrait qu'il existe un nombre dont le carré soit négatif. Impossible ? Oui c'est vrai, pour les nombres connus jusqu'à aujourd'hui, mais un cours instant, imaginons...

Notons i un nouveau nombre, tel que $i^2 = -1$.

Alors le carré de son opposé $(-i)^2 = (-1)^2 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$.

Alors l'équation $x^2 = -1$ admettra comme solutions : i et $-i$.

Ce nombre n'étant pas réel, nous créons un nouvel ensemble de nombres, appelé **ensemble des nombres complexes** \mathbb{C} .

Cet ensemble contient l'ensemble des nombres réels, ainsi que tous les ensembles de nombres contenus dans l'ensemble des nombres réels.

Dans cet ensemble, on peut y trouver des nombres qui contiennent deux informations : une partie réelle, et une partie imaginaire.