

Résoudre une équation se ramenant à une équation du premier degré

a) Equations produit nul

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(2x + 3)(x - 7) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0$$

$$2x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 7$$

L'équation admet deux solutions dans \mathbb{R} :

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; 7 \right\}$$

$$2x(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'équation admet trois solutions dans \mathbb{R} :

$$S = \{-3; 0; 5\}$$

b) Utilisation de la factorisation

Exemples, factorisation par identités remarquables.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'équation admet deux solutions dans \mathbb{R} :

$$S = \{-3; 3\}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

L'équation admet une solution dans \mathbb{R} :

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$9x^2 + 6x = -1$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$(3x + 1)^2 = 0$$

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

L'équation admet une solution réelle :

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

Exemples, factorisation par mise en évidence d'un facteur commun.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x - 2) = 0$$

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

L'équation admet deux solutions \mathbb{R} :

$$S = \{0; 2\}$$

$$5(x - 3)^2 + 2(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)[5(x - 3) + 2] = 0$$

$$(x - 3)(5x - 15 + 2) = 0$$

$$(x - 3)(5x - 13) = 0 \text{ c'est une équation produit nul}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 13 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{13}{5}$$

L'équation admet deux solutions dans \mathbb{R} :

$$S = \left\{ 3; \frac{13}{5} \right\}$$

c) Equations quotient nul

Propriété : $\frac{a(x)}{b(x)} = 0$ si et seulement si $\begin{cases} a(x) = 0 \\ b(x) \neq 0 \end{cases}$

Exemples :

$$\begin{aligned} \frac{5x+1}{2-5x} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x+1=0 \\ 2-5x \neq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x=-1 \\ -5x \neq -2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution :

$$S = \left\{ -\frac{1}{5} \right\}$$

$$\frac{3}{x+2} = 5$$

$$\frac{3}{x+2} - 5 = 0$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{5(x+2)}{x+2} = 0$$

$$\frac{3-5x-10}{x+2} = 0$$

$$\frac{-7-5x}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7-5x=0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{5} \\ x \neq -2 \end{cases}$$

L'équation admet une unique solution :

$$S = \left\{ \frac{-7}{5} \right\}$$

d) Equations en égalité de quotients

Propriété : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$ et $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Exemple :

$$\frac{4x-6}{x} = \frac{2x+1}{0,5x-2}$$

Valeurs interdites : $x \neq 0$ et $x \neq 4$

$$(4x-6)(0,5x-2) = x(2x+1) \quad \text{avec } x \neq 0, x \neq 4$$

$$2x^2 - 8x - 3x + 12 = 2x^2 + x \quad \text{avec } x \neq 0, x \neq 4$$

$$2x^2 - 11x + 12 - 2x^2 - x = 0 \quad \text{avec } x \neq 0, x \neq 4$$

$$-12x + 12 = 0 \quad \text{avec } x \neq 0, x \neq 4$$

$$x = 1 \quad \text{avec } x \neq 0, x \neq 4$$

L'équation de départ admet donc une unique solution : $x = 1$.