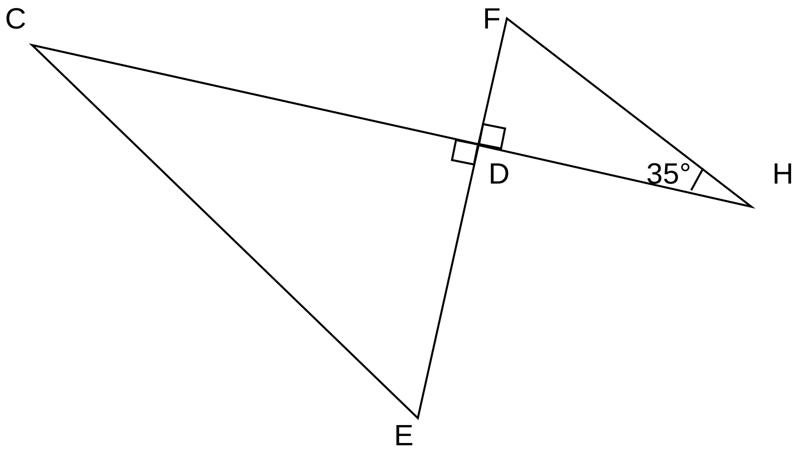
Exercice 1. 5 points : 1 point par question. *Exercice inspiré du problème de Erialc.*

Après les critiques de Cristiano Ronaldo sur son dab, Paul Pogba s'est entraîné et sait maintenant faire des dabs parfaits. Selon l'ouvrage « La déclaration universelle des droits du dab » (DUDDDD), un dab est parfait si et seulement si les triangles représentés sur la figure sont rectangles.

Données : CE=90cm ; CD=72cm ; DE=54cm ; GH=23,2cm et $\widehat{GHF}$=35°.

1. On utilise la représentation ci-dessus du dernier dab effectué par Paul Pogba.
   a) Démontrer que le triangle CDE est effectivement rectangle en D.
   b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ECD}$, arrondir au degré près.
2. Voici la figure obtenue si on déplace le petit triangle près du grand, en alignant les points C, D, G, M (les points D et G sont alors confondus en D). Les points E, F, D sont alors alignés également.



Données CE=90cm ; CD=72cm ; DE=54cm ; DH=23,2cm et $\widehat{DHF}$=35°.

a) Calculer une valeur approchée au millimètre près de FH.
b) Calculer FD. (Pythagore)
c) Les droite (CE) et (FH) sont-elles parallèles ?

Correction :
1°) a) Dans le triangle CED le côté le plus long est CE
$CE^2 = 90^2 = 8\,100$
$CD^2 + DE^2 = 72^2 + 54^2$
$CD^2 + DE^2 = 5\,184 + 2\,916$
$CD^2 + DE^2 = 8\,100$
On a $CE^2 = CD^2 + DE^2$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CED est rectangle en D.

1°) b) Dans le triangle CED rectangle en D j'utilise le cosinus.
$$\cos \widehat{ECD} = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{ECD}}{hypoténuse}$$
$$\cos \widehat{ECD} = \frac{CD}{CE}$$
$$\cos \widehat{ECD} = \frac{72}{90}$$
$$\cos \widehat{ECD} = 0{,}8$$
Donc on a $\widehat{ECD} = \cos^{-1}(0{,}8)$
$$\widehat{ECD} \approx$$
2°) a) Dans le triangle DFH rectangle en D j'utilise le cosinus.
$$\cos \widehat{DHF} = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{DHF}}{hypoténuse}$$
$$\cos \widehat{DHF} = \frac{DH}{FH}$$
$$FH = \frac{DH}{\cos \widehat{DHF}}$$
$$FH = \frac{23{,}2}{\cos 35}$$
$FH \approx 28{,}3$ cm.

2°) b) Dans le triangle DFH rectangle en D j'utilise le théorème de Pythagore.

$FD^2 = FH^2 - HD^2$
$FD^2 \approx 28{,}3^2 - 23{,}2^2$
$FD^2 \approx 800{,}89 - 538{,}24$
$FD^2 \approx 262{,}65$
$FD \approx \sqrt{262{,}65}$
$FD \approx 16{,}2$cm.

2°) c) Les points C, D, H ; ainsi que les points F, D, E ; sont alignés et dans cet ordre.
$$\frac{DC}{DH} = \frac{72}{23{,}2} \approx 3{,}1$$
$$\frac{DE}{DF} = \frac{54}{16{,}2} \approx 3{,}33$$
D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (CE) et (FH) ne sont pas parallèles.
Remarque : une démonstration basée sur le fait que les angles alternes-internes ne sont pas égaux est tout à fait correcte si bien rédigée.

Exercice 2. 4 points : 1°) 0,25+0,25+0,5 - 2°) 0,5+0,5 – 3°) 0,5+1+0,5

Voici l'abonnement téléphonique que Zorad a choisi : il paye chaque semaine un tarif de 2,5 euros, puis il paye 0,15 euros par SMS envoyé.

1°) Etude du tarif de Zorad.

a) Calculer combien Zorad devra payer une semaine où il aura envoyé 15 SMS.
b) Combien Zorad devra payer une semaine où il n'aura envoyé aucun SMS.
c) Combien de SMS Zorad peut-il envoyer s'il ne veut pas dépenser plus de 6,70€ ?

2°) Etude d'une fonction.

On considère f la fonction qui, au nombre x de SMS envoyés pendant une semaine, fait correspondre le prix payé $f(x)$ en euros. On admet que $f(x) = 2{,}5 + 0{,}15x$

a) Calculer l'image de 16 par f. Expliquer à quoi ce calcul correspond pour Zorad.
b) Calculer l'antécédent de 16 par f. Expliquer à quoi ce calcul correspond pour Zorad.

3°) Représentation graphique.

a) Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$					

b) Construire un repère en choisissant 1cm pour 2 unités sur l'axe des abscisses et 2cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, puis tracer la représentation graphique de la fonction f. Préciser sur chaque axe ce qui est représenté.

c) Vérifier graphiquement la réponse de la question 2a, laisser les traits de construction apparents.

Correction :

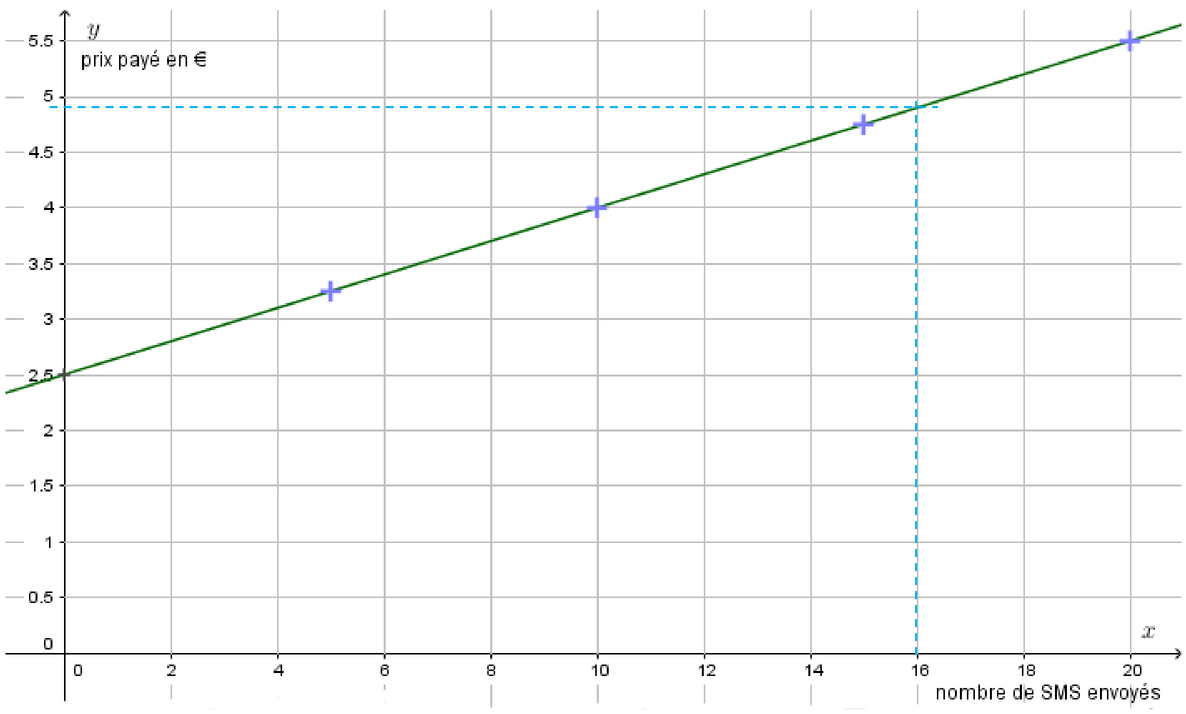
1°) a) $15 \times 0{,}15 + 2{,}5 = 2{,}25 + 2{,}5 = 4{,}75$. Zorad doit payer 4,75€ pour envoyer 15 SMS.
1°) b) Zorad devra payer 2,5€ s'il n'envoie aucun SMS.
1°) c) $6{,}70 - 2{,}5 = 4{,}20$ et $4{,}20 \div 0{,}15 = 28$ donc il peut envoyer 28 SMS sans dépasser 6,70€.

2°) a) $f(16) = 2{,}5 + 0{,}15 \times 16 = 2{,}5 + 2{,}4 = 4{,}9$. Cela signifie que si Zorad envoie 16 SMS, alors il payera 4,9€.
2°) b) on cherche x tel que $f(x) = 16$ donc $2{,}5 + 0{,}15x = 16$ donc $0{,}15x = 13{,}5$ d'où $x = 90$. Cela signifie qu'il peut envoyer 90 SMS s'il peut payer 16€.

3°) a)

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	2,5	3,25	4	4,75	5,5

3°) b)



3°) c) on a bien vérifié graphiquement que l'image de 16 par f est 4,9.

Exercice 3. 4 points : 1+1+1+1

On donne le programme de calcul suivant :

1. Choisir un nombre.
2. Calculer le carré de ce nombre.
3. Multiplier le résultat par quatre.
4. Soustraire du résultat le double du nombre de départ.
5. Soustraire du résultat dix fois le nombre de départ.
6. Ajouter 9 au résultat.

1°) Quel nombre obtient-on si on applique le programme de calcul au nombre 5 ?

3°) Soit f la fonction qui, à tout nombre x fait correspondre le nombre $f(x)$ renvoyé par le programme de calcul. Justifier que l'on a $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

3°) Factoriser $f(x)$.

4°) Est-il possible de proposer un programme de calcul qui effectuerait la même chose en moins d'étapes ? Si oui, écrire sur la copie une proposition de programme.

Correction.

1°) Si on applique le programme à 5 on obtient 49 :
$5 \longmapsto 25 \longmapsto 100 \longmapsto 100 - 10 = 90 \longmapsto 90 - 50 = 40 \longmapsto 40 + 9 = 49$

2°) Si on applique le programme à x on obtient bien $4x^2 - 2x - 10x + 9$ car :
$x \longmapsto x^2 \longmapsto 4x^2 \longmapsto 4x^2 - 2x \longmapsto 4x^2 - 2x - 10x = 4x^2 - 12x \longmapsto 4x^2 - 12x + 9$

3°) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2\times2x\times3 + 3^2 = (2x - 3)^2$.

4°) Oui il est possible de créer un programme plus rapide :

1. Choisir un nombre.
2. Calculer le double de ce nombre.
3. Soustraire 3 au résultat.
4. Mettre le résultat au carré.

Exercice 4. 4 points.

Questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Sur la copie, indiquer le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Les questions sont indépendantes les unes des autres.

	A	B	C
1°) $E = 2^4 \times 3^6 \times 5^2$	A est le carré d'un nombre entier.	$A = 30^{12}$	A est divisible par
2°) F est à la fois divisible par 12 et par 8. Alors…	B est divisible par 72.	B est divisible par 4.	B est un multiple de 48.
3°) Un nombre est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs, sauf lui-même.	28 est un nombre parfait.	36 est un nombre parfait.	54 est un nombre parfait.
4°) Choisis la phrase correcte…	Si les deux derniers chiffres d'un nombre sont divisibles par 8 alors ce nombre est divisible par 8.	La somme entre trois nombres consécutifs supérieurs à 10 est toujours un multiple de 6.	La différence entre le carré d'un nombre premier et 1 fait toujours un multiple de 4.

Correction :

1°) E est le carré d'un nombre entier. (réponse A)

2°) F est divisible par 4. (réponse B)

3°) 28 est un nombre parfait (28=1+2+4+7+14) (réponse A)

4°) La différence entre le carré d'un nombre premier et 1 fait toujours un multiple de 4. (réponse C)

Exercice 5. 3 points. (inspiré des problèmes Dudu)

Arnaud fait une conjecture : « La différence entre le carré de deux nombres consécutifs est toujours égale à la somme entre les deux nombres de départ ».

Julien répond : « c'est faux ! ».

En partant de deux nombres consécutifs n et $n+1$, déterminer qui, de Arnaud ou de Julien, a raison.

Toute piste de recherche, même non aboutie, doit figurer sur la copie.

Correction :

Le carré du premier nombre n est n^2.

Le carré du second nombre $n+1$ est $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

La différence entre les deux est $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = n + n + 1$.

C'est bien la somme entre les deux nombres de départ n et $n+1$, donc Arnaud a raison.