ENSEMBLES DE NOMBRES

1°) Les nombres entiers

a) Définitions.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{3}\,;\mathbf{4}\,;\mathbf{5}\,;\ \ldots\}$
C'est l'ensemble des nombres entiers positifs.

L'ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ \mathbf{-5}\,;\ \mathbf{-4}\,;\ \mathbf{-3}\,;\ \mathbf{-2}\,;\ \mathbf{-1}\,;\ \mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{3}\,;\mathbf{4}\,;\mathbf{5}\,;\ \ldots\}$
Cet ensemble est souvent appelé ensemble des nombres relatifs.

Remarques :

- Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif.
  On dit que l'ensemble des entiers naturels « est inclus dans » l'ensemble des entiers relatifs, et on note :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

b) Multiples et diviseurs.

Lorsque le reste de la division euclidienne est 0, on a un nombre divisible par un autre.

Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ \cline{2-2} -10 & 25 \\ \cline{1-1} 25 & \\ -25 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Le reste de la division de 125 par 5 est 0
125 est **divisible** par 5
5 est un **diviseur** de 125
125 est un **multiple** de 5
On peut écrire **125 = 5 x 25**

Définition :
a et b sont deux entiers.
a est multiple de b si on peut trouver un entier k tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que : b est un diviseur de a ; b divise a ; a est divisible par b…

Exemples : un multiple de 3 peut toujours s'écrire sous la forme $3k$: 21 = 3x7 ; –63 = 3x(–9)…
un multiple de 7 peut toujours s'écrire sous la forme $7k$: –14 = 7x(–2) ; 161 = 7x23…
un multiple de 2 peut toujours s'écrire sous la forme $2k$: 154 = 2x77 ; 34 = 2x17…

Propriété : soit un entier a. **La somme de deux multiples de a est un multiple de a.**

Démonstration :

Prenons deux multiples de a, par exemple les nombres an et am, avec $n, m \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme de ces deux nombres s'écrit $an + am = a(n + m)$.

Le nombre $n + m$ est nécessairement un entier relatif, donc on a bien l'écriture d'un multiple de a.

c) Nombres pairs, nombres impairs.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Propriété : **Tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2k$,**
Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2k+1$.

Exemples :

Nombres pairs : 6 = 2 x 3 ; 16 = 2 x 8 ; 2 022 = 2 x 1 011 ; 2 = 2 x 1…
Nombres impairs : 7 = 2 x 3 + 1 ; 19 = 2 x 9 + 1 ; 2 021 = 2 x 1 010 + 1 ; 1 = 2 x 0 + 1 …

Propriétés : **Le carré d'un nombre pair est un nombre pair.**
Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstrations : soit k un entier.

Le carré d'un nombre pair s'écrit : $(2k)^2$
$(2k)^2 = 2^2k^2$
$= 4k^2$
$= 2 \times 2k^2$ et comme k est un nombre entier, $2k^2$ est aussi un nombre entier.
Le carré d'un nombre pair est bien un nombre pair.

Le carré d'un nombre impair s'écrit : $(2k+1)^2$
$(2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$
$= 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(2k^2 + 2k) + 1$
et $2(2k^2 + 2k)$ est aussi un nombre entier, donc le carré d'un nombre impair est bien impair.

d) Nombres premiers.

Définition : **un nombre entier est dit premier**
s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

- 0 n'est pas un nombre premier car il admet une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier qui soit pair.

Les premiers nombres premiers sont :

Propriété : **tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est soit premier,**
soit décomposable en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition en produit de facteurs premiers est unique.

Exemples : décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 72.

Méthode 1 :

72 = 8 x 9
= 4 x 2 x 3 x 3
= 2 x 2 x 2 x 3 x 3
72 = 2^3 x 3^2

Méthode 2 :

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

de ce côté on n'écrit que des diviseurs qui sont premiers

de ce côté on écrit les quotients

on a : 72 = 2^3 x 3^2

on s'arrête lorsqu'on a un 1

e) Fractions irréductibles.

Définition : **On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$, est irréductible lorsque les nombres a et b ne possèdent qu'un unique diviseur commun : 1. On dit alors que les nombres a et b sont premiers entre eux.**

On peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur pour prouver qu'une fraction est irréductible, ou pour rendre une fraction irréductible.

Exemples :

1°) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 72, 60 et 49.

Réponses : $72 = 2^3 \times 3^2$; $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $49 = 7^2$.

2°) Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{72}$.

Réponse : $\frac{60}{72} = \frac{2^2\times3\times5}{2^3\times3^2} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times3} = \frac{5}{2\times3} = \frac{5}{6}$

3°) La fraction $\frac{49}{72}$ est-elle irréductible ? Justifier.

Réponse : $\frac{49}{72} = \frac{7^2}{2^3\times3^2}$

Les nombres 49 et 72 sont premiers entre eux car ils n'ont aucun autre diviseur commun que 1, donc la fraction est irréductible.

2°) Les ensembles de nombres

Tu peux regarder jusqu'à 5 min 47 s

Les ensembles de nombres sont reliés à l'avancée des découvertes en sciences et en mathématiques.

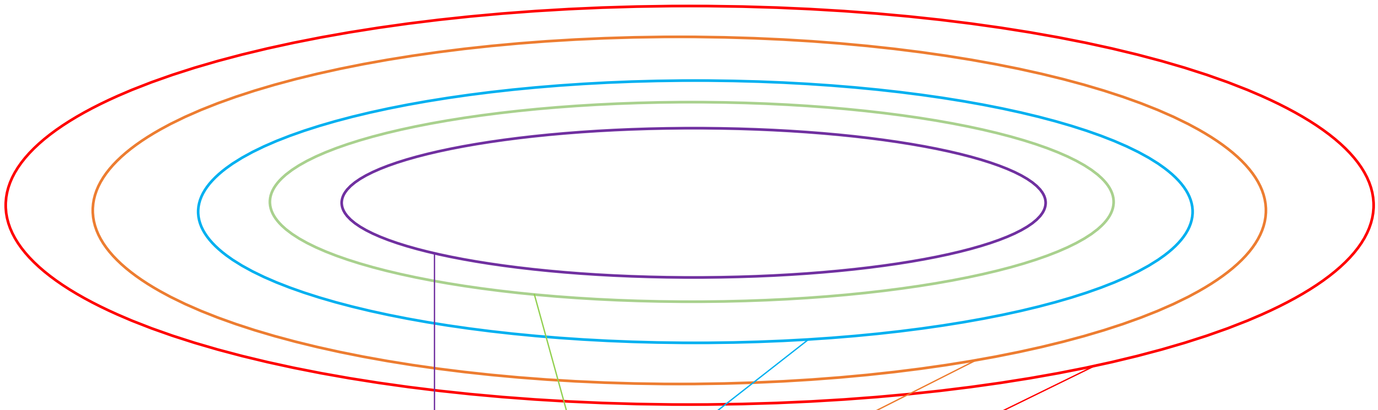
L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{\mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3} ; \mathbf{4} ; \mathbf{5} ; \dots\}$
C'est l'ensemble des nombres entiers positifs, que l'on utilise naturellement pour compter.

L'ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots ; \mathbf{-5} ; \mathbf{-4} ; \mathbf{-3} ; \mathbf{-2} ; \mathbf{-1} ; \mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3} ; \mathbf{4} ; \mathbf{5} ; \dots\}$
Dans cet ensemble, on peut effectuer toutes les additions et soustractions.

L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$
Ou encore : c'est l'ensemble de tous les nombres qui admettent une écriture décimale finie.
Par exemple, les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{D}$: $\frac{1}{4}$; $2{,}5$; 7 ; $-8{,}23$; $2\,000$; $0{,}008$ ...
Mais attention les nombres $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{23}{99}$; ... ne sont pas des nombres décimaux.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
C'est l'ensemble de tous les nombres qui ont une écriture fractionnaire existante.

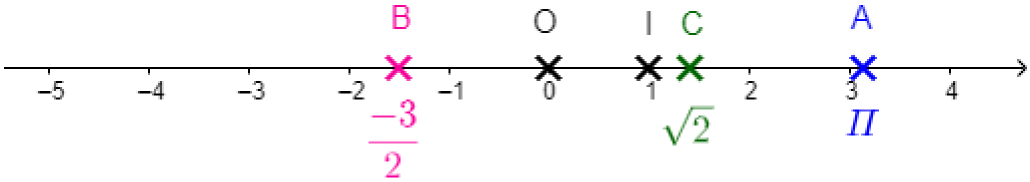
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$
Les nombres qui n'ont pas d'écriture fractionnaire s'appellent des nombres irrationnels, par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On trouve dans $\mathbb{R}$ tous les nombres réels : tous ceux dont on a parlé avant, mais aussi les nombres comme $\pi, \varphi, \dots$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Notion de droite des réels :

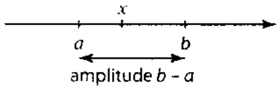
On peut représenter $\mathbb{R}$ par **une droite numérique** : à chaque point de la droite correspond un unique réel, à chaque réel correspond un unique point de la droite.
Considérons une droite graduée :



3°) Valeur approchée et encadrement : travail sur l'ensemble des nombres décimaux.

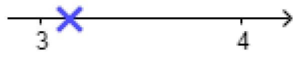
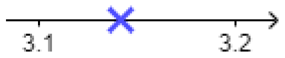
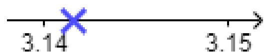
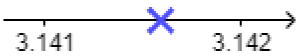
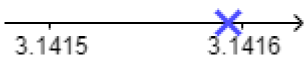
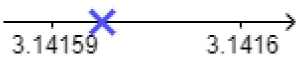
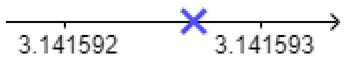
a) Encadrement.

Définition : Donner **un encadrement** décimal d'un nombre réel x c'est donner deux nombres décimaux m et M tels que $m \leq x < M$.
Alors $M - m$ est appelé **amplitude** de l'encadrement.



L'encadrement est à 10^{-n} près si son amplitude est égale à 10^{-n} (avec $n \in \mathbb{N}$).

Exemples avec le nombre π :

Représentation	Précision	Encadrement	Valeur approchée
	à l'unité près	$3 \leq \pi < 4$	$\pi \approx 3$
	à 10^{-1} près	$3{,}1 \leq \pi < 3{,}2$	$\pi \approx 3{,}1$
	à 10^{-2} près	$3{,}14 \leq \pi < 3{,}15$	$\pi \approx 3{,}14$
	à 10^{-3} près	$3{,}141 \leq \pi < 3{,}142$	$\pi \approx 3{,}142$
	à 10^{-4} près	$3{,}1415 \leq \pi < 3{,}1416$	$\pi \approx 3{,}1416$
	à 10^{-5} près	$3{,}14159 \leq \pi < 3{,}14160$	$\pi \approx 3{,}14159$
	à 10^{-6} près	$3{,}141592 \leq \pi < 3{,}141593$	$\pi \approx 3{,}141593$

b) Valeur approchée.

On parle **de valeur approchée** lorsque l'on donne **la valeur la plus proche**.
On peut cependant choisir de donner la valeur la plus proche

- » qui soit **inférieure** (dans ce cas, on parle de valeur approchée **par défaut**)
- » qui soit **supérieure** (dans ce cas, on parle de valeur approchée **par excès**)

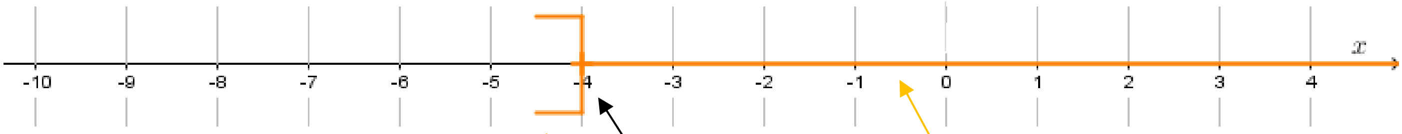
Exemples : la valeur approchée de π par excès à l'unité près est 4.
la valeur approchée de π par défaut à 10^{-4} près est 3,1415.
la valeur approchée de π à 10^{-2} près est 3,14.

<u>4°) intervalles</u> : travail sur l'ensemble des nombres réels.

a) Notion d'intervalle.

Un intervalle est un morceau de la droite des réels.
C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Par exemple, voici l'intervalle constitué des nombres strictement supérieurs à -4 :



On a représenté ici tous les nombres strictement supérieurs à -4

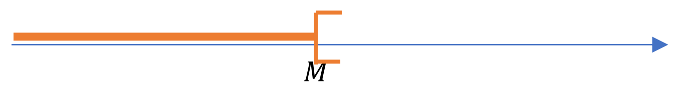
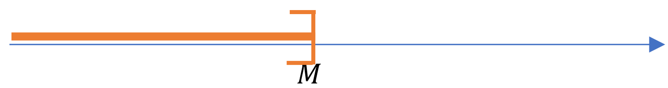
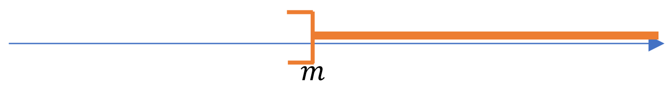
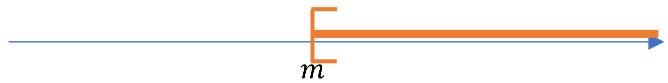
Les crochets sont vers l'extérieur car la borne -4 n'appartient pas à l'intervalle

-4 s'appelle une « borne »
dans notre cas il n'appartient pas à l'intervalle

L'intervalle associé à cet ensemble de nombres est : $]-4\,;\,+\infty[$

L'infini (car pas de borne supérieure) est TOUJOURS exclu de l'intervalle

Voici trois façons différentes de donner la même information :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$x < M$	$]-\infty\,;\,M[$	
$x \leq M$	$]-\infty\,;\,M]$	
$x > m$	$]a\,;\,+\infty[$	
$x \geq m$	$[a\,;\,+\infty[$	
$m \leq x \leq M$	$[m\,;M]$	
$m < x \leq M$	$]m\,;M]$	
$m \leq x < M$	$[m\,;M[$	
$m < x < M$	$]m\,;M[$	

ensemble des nombres compris entre / supérieurs à / inférieurs à

ensemble des réels x tels que

Cas particuliers :

Un intervalle vide se note $\emptyset$ (lire : « ensemble vide »).

Un intervalle qui n'a aucune borne est $]-\infty\,;\,+\infty[\; = \mathbb{R}$.

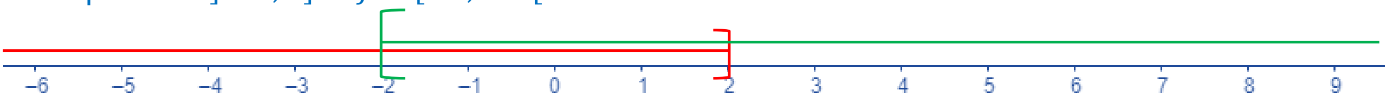
b) Réunion et intersection d'intervalles :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On note $I \cup J$ et on lit « ***I* union *J*** » l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ***ou*** à J, c'est-à-dire soit à I, soit à J,soit aux deux.

On note $I \cap J$ et on lit « ***I* inter *J*** » l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ***et*** à J, c'est-à-dire qui sont simultanément dans I et dans J.

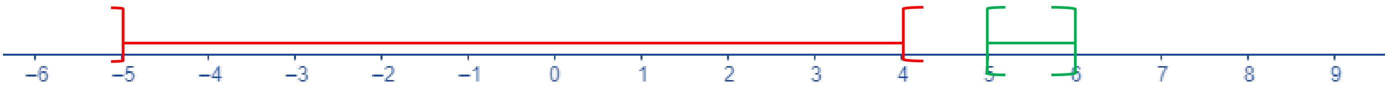
Exemple : $I =]-\infty; 2]$ et $J = [-2; +\infty[$ cas où on a un chevauchement



$I \cup J = \mathbb{R}$

$I \cap J = [-2\,;2]$

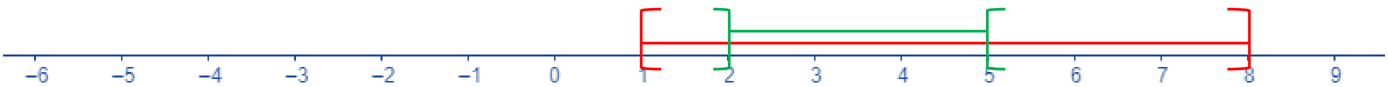
Exemple : $I =]-5\,;4[$ et $J = [5\,;6]$ cas où les intervalles sont disjoints



$I \cup J =]-5\,;4[\, \cup [5\,;6]$

$I \cap J = \emptyset$

Exemple : $I = [1\,;8]$ et $J =]2\,;5[$ cas où on a une inclusion : ici $J \subset I$



$I \cup J = [1\,;8] = I$

$I \cap J =]2; 5[= J$

c) Notion de valeur absolue.

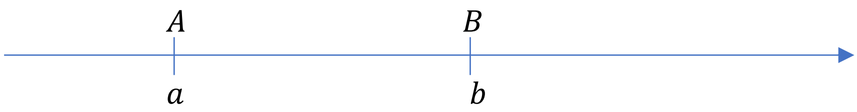
Ce qu'on appelle la valeur absolue d'un nombre, c'est sa distance à zéro.

On utilise deux traits verticaux pour la noter : par exemple $|-5| = 5$ ou $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} \dots$

Propriétés : La valeur absolue d'un nombre est égale à la valeur absolue de son opposé.
La valeur absolue d'un nombre est toujours un nombre positif ou nul.

Exemples : $|-5| = |5| = 5,$ $|5-8| = |8-5| = 3 \dots$

d) Lien entre valeur absolue et distance entre deux nombres.



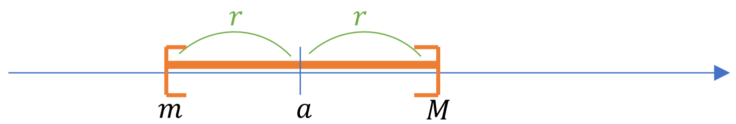
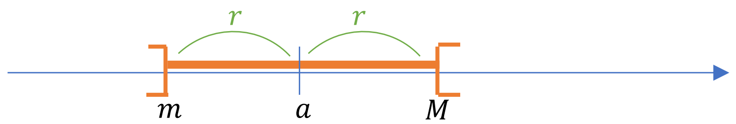
La distance entre A et B se note AB et est définie par : $AB = |a-b| = |b-a|$

e) Intervalles centrés, amplitude, rayon.

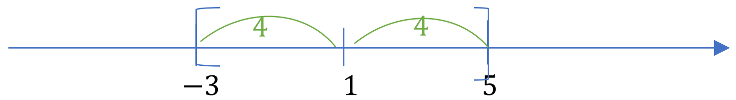
Notons m la borne inférieure et M la borne supérieure.

Alors le **centre** de l'intervalle est $a = \frac{m+M}{2}$

L'amplitude de l'intervalle est $M - m$ et son **rayon** est $r = M - a = a - m$.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$\lvert x-a \rvert \leq r$	$[a-r\,;a+r]$	
$\lvert x-a \rvert < r$	$]a-r\,;a+r[$	

Exemples : compléter le tableau

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$\lvert x-1 \rvert \leq 4$	$[-3\,;5]$	
$\lvert x-1 \rvert \leq 3$	$[-2\,;4]$	
$\lvert x-2 \rvert < 1$	$]1\,;3[$