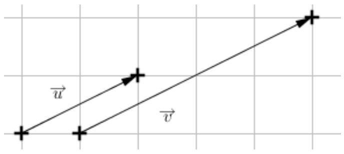
UTILISER DES VECTEURS COLINEAIRES

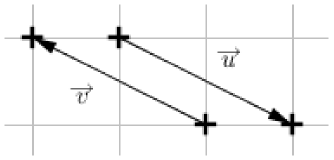
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que les vecteurs sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel non nul k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.
Dans ce cas, on a également $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$.
On dit que k et $\frac{1}{k}$ sont les coefficients de colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemples de vecteurs colinéaires :

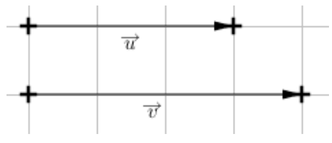
$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{v} = 2\vec{u}$



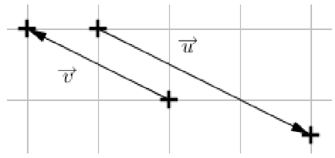
$\vec{u} = -\vec{v}$ et $-\vec{u} = \vec{v}$



$\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{v}$ et $\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{v}$



$\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}$ et $-\frac{2}{3}\vec{u} = \vec{v}$



Observations :

- Deux vecteurs colinéaires ont **la même direction**.
- Deux vecteurs colinéaires ont le même sens si et seulement si $k > 0$.
- Deux vecteurs colinéaires sont de sens contraire si et seulement si $k < 0$.

Colinéarité et coordonnées, multiplication par un nombre réel, linéarité du calcul vectoriel :

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel non nul. Alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$.
- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, k et l deux réels non nuls. Alors $k\vec{u} + l\vec{v}\begin{pmatrix} ka + la' \\ kb + lb' \end{pmatrix}$.
- Deux vecteurs colinéaires ont leurs coordonnées proportionnelles.

Exemples : $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2\times 5 \\ 2\times(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\times(-1) \\ 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $-3\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\times(-1) \\ -3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$,

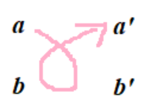
$$2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 5 \\ 2\times(-3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\times(-1) \\ -3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+3 \\ -6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Si A, B, C, D sont quatre points d'un repère,

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C sont alignés.

Déterminant : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Alors le nombre $ab' - a'b$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, on peut :

- Vérifier la proportionnalité des coordonnées (des abscisses et des ordonnées).
- Vérifier l'égalité du produit en croix $ab' = a'b$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à 0.
- Résoudre un problème de parallélisme ou d'alignement de points.
- Déterminer un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Droite et colinéarité : une nouvelle définition de la droite.
La droite (AB) est l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.