DEMONTRER UN ALIGNEMENT

Dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère trois points A, B, C.

$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

A, B, C alignés

$A \epsilon (BC)$

(AB) et (AC) sont parallèles avec un point commun

Exemple d'utilisation :

Dans un repère $(O; I; J)$, les trois points $A(-5; 2)$; $B(-1; -1)$ et $C(7; -7)$ sont-ils alignés ?

On observe que les points ont trois abscisses et trois ordonnées différentes, donc s'ils sont alignés, ce n'est ni horizontalement, ni verticalement. Voici trois stratégies différentes pour répondre à la question :

Je calcule l'équation de la droite (AB) et je vérifie par calcul si le point C est bien sur la droite (AB).

$(AB) : y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$

Donc on a $y = -\frac{3}{4}x + p$, comme $B \in (AB)$ on a

$y_A = -\frac{3}{4}x_A + p$ donc $-1 = -\frac{3}{4} \times (-1) + p$

d'où $p = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$.

L'équation de la droite (AB) est $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

Vérifions si C appartient à la droite :

$$-\frac{3}{4}x_C - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4} \times 7 - \frac{7}{4} = -\frac{28}{4} = -7 = y_C$$

Les points A, B, C sont alignés.

Je calcule le coefficient directeur m_1 de la droite (AB) et le coefficient directeur m_2 de la droite (BC) puis je les compare.

$$(AB) : m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$$

$$(BC) : m_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-7+1}{7+1} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

Les coefficients directeurs sont égaux, on en déduit que les droites (AB) et (BC) sont parallèles.
De plus, elles ont le point B en commun.
Donc elles sont confondues, et les points A, B, C sont alignés.

Je calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et je détermine s'ils sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-5) \\ -1-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7-(-5) \\ -7-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles. De plus, elles ont le point A en commun, donc elles sont confondues, et les points A, B, C sont alignés.

DEMONTRER UN PARALLELISME

Dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère deux droites d et d'.
Alors nécessairement, soit d et d' sont parallèles (distinctes ou confondues), soit d et d' sont sécantes en un point.
Deux droites parallèles ont la même pente : même coefficient directeur ou vecteurs directeurs colinéaires.

Exemple d'utilisation :

Dans un repère $(O; I; J)$, les droites $d : 4x - 3y + 2 = 0$ et $e : 2x + 1{,}5y - 6 = 0$ sont-elles parallèles ?

Voici un vecteur directeur de chaque droite : $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $\vec{d} = -2\vec{e}$, les vecteurs sont colinéaires donc les droites sont parallèles. Comme $(-2; 0) \notin d$ et $(-2; 0) \epsilon\ e$, elles sont distinctes