

Déterminer la nature d'un quadrilatère

Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

On donne les quatre points $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(1; -1)$, $D(-3; -4)$: représenter la situation, conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$ puis démontrer la conjecture.

Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme :

On sait que : $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(1; -1)$, $D(-3; -4)$.

Propriété : si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AC]$,

$$\text{alors } x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 ; \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

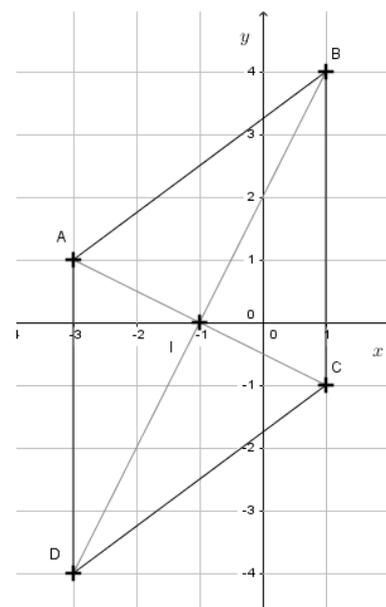
donc $I(-1; 0)$.

Soit $J(x_J; y_J)$ le milieu de $[BD]$,

$$\text{alors } x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 ; \text{ et } y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 - 4}{2} = 0$$

donc $J(-1; 0)$.

Conclusion : les points I et J sont confondus, les diagonales du quadrilatère ont le même milieu, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



Montrons que $ABCD$ est un losange :

On sait que : $ABCD$ est un parallélogramme et $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(1; -1)$, $D(-3; -4)$.

Propriété : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même mesure, alors c'est un losange.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (4 - 1)^2}$$

$$AB = \sqrt{16 + 9}$$

$$AB = 5$$

On a : $AB = AD = 5$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (-4 - 1)^2}$$

$$AD = \sqrt{0 + 25}$$

$$AD = 5$$

Conclusion : le parallélogramme $ABCD$ est un losange.