Démontrer que deux droites sont parallèles ou sécantes

Toute droite dont l'équation est de la forme $x = k$ est une droite verticale, parallèle à l'axe des ordonnées.
Toute droite dont l'équation est de la forme $y = k$ est une droite horizontale, parallèle à l'axe des abscisses.

Soient d une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et d' une droite d'équation réduite $y = m'x + p'$.

$$d \text{ est parallèle à } d' \quad \text{si et seulement si} \quad m = m'$$

Si deux droites ne sont pas parallèles alors elles sont sécantes.
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection entre les deux droites d et d' on résout le système formé par les deux équations de droite.

Exemple :
On considère les droites $a : y = 2x - 5$; $b : y = \frac{1}{2}x + 1$; $c : y = 0{,}5x - 1$
Justifier que les droites b et c sont parallèles.
Justifier que les droites a et b, puis que les droites a et c, sont sécantes, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Réponses non détaillées : après calcul on trouve que le point d'intersection entre les droites a et b est $(4 ; 3)$ et le point d'intersection entre a et c est $\left(\frac{8}{3} ; \frac{1}{3}\right)$. Les droites b et c sont parallèles car elles ont même coefficient directeur.

Démontrer un alignement de points

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut :

- Les points pourraient être alignés verticalement ou horizontalement :
  on vérifie s'ils ont la même abscisse ou la même ordonnée.
- Avec deux points, on calcule l'équation de la droite.
  On vérifie ensuite si le troisième point appartient à la droite (par calcul).
- On forme deux droites d_1 et d_2 en choisissant deux fois 2 points, et on calcule les deux coefficients directeurs m_1 et m_2. Si $m_1 = m_2$, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles, or comme elles ont un point en commun, elles sont donc confondues, et les trois points sont alignés.

Exemple : dans un repère $(O; I; J)$, les points $A(-5; 2)$; $B(-1; -1)$ et $C(7; -7)$ sont-ils alignés ?

On observe que les points ont trois abscisses et trois ordonnées différentes, donc s'ils sont alignés, ce n'est ni horizontalement, ni verticalement. Voici deux stratégies différentes pour répondre à la question :

Je calcule l'équation de la droite (AB) et je vérifie par calcul si le point C est bien sur la droite (AB).

$(AB) : y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$
Donc on a $y = -\frac{3}{4}x + p$, comme $B \in (AB)$ on a
$y_A = -\frac{3}{4}x_A + p$ donc $-1 = -\frac{3}{4} \times (-1) + p$
d'où $p = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$.
L'équation de la droite (AB) est $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

Vérifions si C appartient à la droite :

$$-\frac{3}{4}x_C - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4} \times 7 - \frac{7}{4} = -\frac{28}{4} = -7 = y_C$$

Les points A, B, C sont alignés.

Je calcule le coefficient directeur m_1 de la droite (AB) et le coefficient directeur m_2 de la droite (BC) puis je les compare.

$$(AB) : \ m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$$

$$(BC) : \ m_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-7+1}{7+1} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

Les coefficients directeurs sont égaux, on en déduit que les droites (AB) et (BC) sont parallèles.
De plus, elles ont le point B en commun.
Donc elles sont confondues, et les points A, B, C sont alignés.