Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

Un système d'équations est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, avec a, b, c, d, e, f nombres réels connus, et x, y les inconnues. Un couple de nombres $(x_0\,;\,y_0)$ est solution du système s'il vérifie les deux équations simultanément. Résoudre un système, c'est chercher toutes les solutions possibles.

Il peut y avoir soit un unique couple solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Méthode A : par substitution.

Exemple avec le système :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+4y=-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-4y-3)-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -12y-9-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -14y=5+9 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -14y=14 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-4\times(-1)-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=4-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Je vérifie mes solutions :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 & 3\times1-2\times(-1)=3+2=5 \quad VRAI \\ x+4y=-3 & 1+4\times(-1)=1-4=-3 \quad VRAI \end{cases}$$

Conclusion : le système admet une unique solution : $(1\,;\,-1)$.

Méthode B : par combinaisons linéaires.

Exemple avec le système :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$$

Je vais faire disparaître l'inconnue x, et pour cela, je vais multiplier la deuxième équation par 2 afin de faire apparaître devant les x de chaque équation un coefficient opposé.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 & (\times 2) \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -4x+4y=-4 \end{cases}$$

J'effectue une addition « membre à membre »

$$0 + \ y=-2$$

La première inconnue est $y=-2$

Je reprends le système de départ :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$$

Pour faire apparaître deux coefficients opposés devant les y, je vais multiplier la première équation par 2 et la deuxième équation par 3.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 & (\times 2) \\ -2x+2y=-2 & (\times 3) \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=4 \\ -6x+6y=-6 \end{cases}$$

J'effectue une addition « membre à membre »

$$2x \quad =-2$$

donc $x=-1$

La première inconnue est $x=-1$

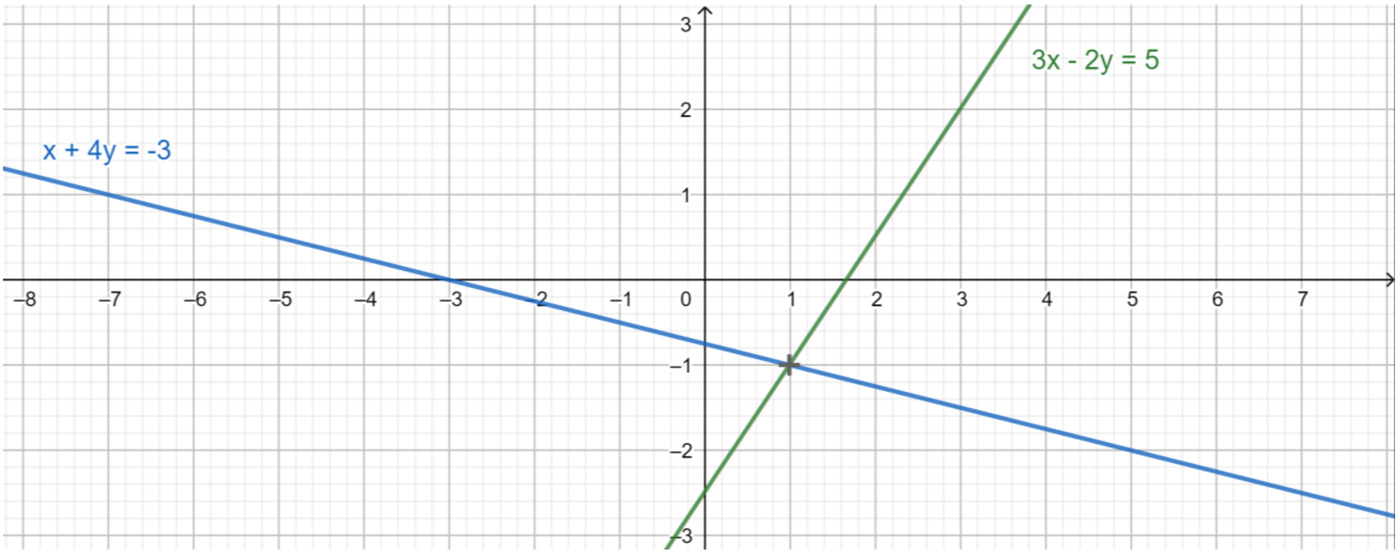
Je vérifie mes solutions :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 & 4\times(-1)-3\times(-2)=-4+6=2 \quad VRAI \\ -2x+2y=-2 & -2\times(-1)+2\times(-2)=2-4=-2 \quad VRAI \end{cases}$$

Conclusion : le système admet une unique solution : $(-1\,;\,-2)$.

Interprétation graphique :

Chaque équation d'un système de deux équations à deux inconnues est l'équation d'une droite.
Le couple solution correspond aux coordonnées du point d'intersection entre les deux droites.
Voici la représentation graphique de l'exemple précédent, colonne de gauche :



Etude de deux cas particuliers :

Cas où le système n'admet aucune solution :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -0{,}4x + y = 1 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ y = 1 + 0{,}4x \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5(1 + 0{,}4x) = -1 \\ y = 1 + 0{,}4x \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 - 2x = -1 \\ y = 1 + 0{,}4x \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -1 \\ y = 1 + 0{,}4x \end{cases}$$

C'est impossible. Ce système est incompatible. Il n'existe donc aucun couple solution.

Graphiquement, ce cas correspond à deux droites qui sont parallèles. En effet : il n'existe aucun point d'intersection.

Cas où le système admet une infinité de solutions :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 2{,}8 \\ x - \dfrac{y}{2} = -0{,}7 \end{cases}$$

Je choisis la méthode par combinaisons linéaires, je vais multiplier la deuxième équation par 4.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 2{,}8 \\ 4s - 2y = -2{,}8 \end{cases}$$

J'effectue l'addition membre à membre, je trouve :

$$0 = 0$$

Ce qui est toujours vrai. Ainsi, le système admet une infinité de couples solutions, il s'agit de tous les $(x; y)$ tels que $-4x + 2y = 2{,}8$.

Graphiquement, ce cas correspond à deux équations d'une même droite, que l'on peut définir comme deux droites confondues. Tout point de la droite est alors solution du système : il existe une infinité de couples solution, qui correspondent à l'ensemble des points qui constituent la droite.