Calculer des approximations de $\sqrt{2}$ en utilisant des nombres rationnels

Pour cette méthode, on va utiliser des encadrements de $\sqrt{2}$, qui seront de plus en plus resserrés autour de $\sqrt{2}$, par des nombres rationnels.

Etude théorique :

Prouvons que, pour tout entier naturel a non nul, on a bien $\sqrt{2}$ encadré par a et $\frac{2}{a}$

Cas n°1 :

$$a \leq \sqrt{2} \leq \frac{2}{a}$$

Supposons $a \leq \sqrt{2}$. Alors :

$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(inverser\ change\ le\ sens\ de\ l'inégalité)$

$\frac{1}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ $(on\ multiplie\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ par\ 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$

$\frac{1}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(on\ simplifie\ l'expression)$

$\frac{2}{a} \geq \sqrt{2}$ $(on\ a\ multiplié\ chaque\ membre\ par\ 2)$

Conclusion :

$$a \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \frac{2}{a}$$

Donc on a bien :

$$a \leq \sqrt{2} \leq \frac{2}{a}$$

Cas n°2 :

$$\frac{2}{a} \leq \sqrt{2} \leq a$$

Supposons $\sqrt{2} \leq a$. Alors :

$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{a}$ $(inverser\ change\ le\ sens\ de\ l'inégalité)$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \geq \frac{1}{a}$ $(on\ multiplie\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ par\ 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{1}{a}$ $(on\ simplifie\ l'expression)$

$\sqrt{2} \geq \frac{2}{a}$ $(on\ a\ multiplié\ chaque\ membre\ par\ 2)$

Conclusion :

$$\sqrt{2} \leq a \Rightarrow \frac{2}{a} \leq \sqrt{2}$$

Donc on a bien :

$$\frac{2}{a} \leq \sqrt{2} \leq a$$

Prouvons que le milieu de l'intervalle $\left[a; \frac{2}{a}\right]$ (pour le cas n°1) ou de l'intervalle $\left[\frac{2}{a}; a\right]$ (pour le cas n°2) est toujours plus grand que $\sqrt{2}$.

Le milieu de l'intervalle, dans les deux cas, est égal à : $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{2} + \frac{2}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\times\sqrt{a}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \qquad TOUJOURS\ VRAI, donc\ on\ a\ bien\ \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{2}$$

On a donc, dans les deux cas, le milieu de l'intervalle qui est toujours plus grand que $\sqrt{2}$.

On peut donc s'amuser à calculer des intervalles successifs, en choisissant comme bornes successives : a milieu de l'intervalle précédent, et $\frac{2}{a}$: on est en effet certains que $\sqrt{2}$ appartiendra à l'intervalle ainsi calculé.

Application numérique :

Prenons comme exemple de départ $a = 1$

Alors $\frac{2}{a} = \frac{2}{1} = 2$; on a $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$, l'intervalle est ici $[1; 2]$.

Pour prendre un intervalle plus proche de $\sqrt{2}$, calculons le milieu de l'intervalle précédent : $\frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$.

Nous prendrons donc $a = \frac{3}{2}$ alors $\frac{2}{a} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$; on a $\frac{4}{3} \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$, l'intervalle est ici $\left[\frac{4}{3} ; \frac{3}{2}\right]$.

Résumons dans un tableau, ce qui permettra de calculer les étapes suivantes plus clairement :

étape	a	$\frac{2}{a}$	comparer a et $\frac{2}{a}$	inégalité	intervalle	milieu de l'intervalle	écart avec $\sqrt{2}$ $\sqrt{2} \approx 1,41421356237309$
n°1	1	2	$1 < 2$	$1 \leq \sqrt{2} \leq 2$	$[\,1\,;\,2\,]$	$\frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} = 1,5$	$0,085786437626$
n°2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$	$\frac{4}{3} \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$	$\left[\frac{4}{3} ; \frac{3}{2}\right]$	$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} \approx 1,41666666$	$0,002453104293$
n°3	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{24}{17} < \frac{17}{12}$	$\frac{24}{17} \leq \sqrt{2} \leq \frac{17}{12}$	$\left[\frac{24}{17} ; \frac{17}{12}\right]$	$\frac{577}{408} \approx 1,4142156862$	$2,1239014147 \times 10^{-6}$
n°4	$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$	$\frac{816}{577} < \frac{577}{408}$	$\frac{816}{577} \leq \sqrt{2} \leq \frac{577}{408}$	$\left[\frac{816}{577} ; \frac{577}{408}\right]$	$\frac{665\,857}{470\,832} \approx 1,41421356237468$	$1,594861824 \times 10^{-12}$

etc…

Etant donné l'aspect répétitif de cette méthode, il est tout à fait possible d'utiliser l'algorithmique pour, par exemple, calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à une précision choisie, ainsi que le nombre d'étapes qu'il faudra pour y parvenir.