Module et Argument d'un nombre complexe : règles de calcul.

Pour l'ensemble de cette fiche, on suppose z, z' deux nombres complexes non nuls distincts, représentés par les points M et M' dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ contenant les points $I(0\,;1)$ et $J(1\,;0)$. On notera θ un argument de z et θ' un argument de z'. On considèrera que n est un entier naturel non nul.

Opposé et conjugué :

$$\boldsymbol{|-z| = |z| \text{ et } \arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$$

$$\boldsymbol{|\bar{z}| = |z| \text{ et } \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ \ [2\pi]}$$

Démonstrations :

Le module d'un nombre complexe est égal au module de son opposé

$$\begin{aligned} |-z| &= |-(x+iy)| \\ &= |-x-iy| \\ &= \sqrt{(-x)^2+(-y)^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{|-z| = |z|}$

L'argument d'un nombre complexe est égal à l'argument de son opposé augmenté de π, à 2π près.

Les points $M(z)$ et $N(-z)$ sont symétriques par rapport au centre du repère O. Ainsi O est milieu du segment $[MN]$.

$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \pi\ [2\pi]$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{ON}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)\ [2\pi]$

$\boldsymbol{\arg(-z) = \arg z + \pi\ [2\pi]}$

Le module d'un nombre complexe est égal au module de son conjugué

$|\bar{z}| = |x - iy|$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\boldsymbol{|\bar{z}| = |z|}$

L'argument d'un nombre complexe est égal à l'opposé de l'argument de son conjugué, à 2π près.

Les points $M(z)$ et $P(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On a donc $\widehat{IOM} = \widehat{IOP}$, M et P étant de part et d'autre par rapport à (OI).

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OP}, \vec{u}\right)\ [2\pi]$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OP}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$

$\boldsymbol{\arg \bar{z} = -\arg z\ \ [2\pi]}$

Produits et quotients :

$$\boldsymbol{|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$$

$$\boldsymbol{|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z)\ \ [2\pi]}$$

$$\boldsymbol{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]}$$

Démonstrations : le module d'un produit est égal au produit des modules

$zz' = (x + iy)(x' + iy')$

$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$

$|zz'| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}$

$|zz'| = \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 + 2xx'yy'}$

$|zz'| = \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (x'y)^2 + (xy')^2}$

$|zz'| = \sqrt{(xx')^2 + (xy')^2 + (yy')^2 + (x'y)^2}$

$|zz'| = \sqrt{x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(x'^2 + y'^2)}$

$|zz'| = \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$

$|zz'| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$

$\boldsymbol{|zz'| = |z|\,|z'|}$

L'argument d'un produit est égal à la somme des arguments, à 2π près :

$zz' = |z|e^{i\theta} \times |z'|e^{i\theta'} = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = |zz'|\, e^{i(\theta+\theta')}$

On a donc $\mathbf{arg}(\boldsymbol{zz'}) = \mathbf{arg}\,\boldsymbol{z} + \mathbf{arg}\,\boldsymbol{z'}\ [\boldsymbol{2\pi}]$

Démonstrations par récurrence : $|z^n| = |z|^n$

Le cas $n = 1$ est évidemment vrai, le cas $n = 2$ a déjà été démontré.

Supposons $|z^k| = |z|^k$ vrai pour $k \geq 2$.

Alors $|z^{k+1}| = |z\,z^k| = |z||z^k| = |z||z|^k = |z|^{k+1}$

Conclusion : $\boldsymbol{|z^n| = |z|^n}$ pour tout n entier naturel non nul.

Démonstration par récurrence : $\arg(z^n) = n\arg(z)\ \ [2\pi]$

Le cas $n = 1$ est évidemment vrai, le cas $n = 2$ a déjà été démontré.

Supposons $\arg(z^k) = k\arg(z)\ \ [2\pi]$ pour $k \geq 2$.

Alors $\arg(z^{k+1}) = \arg(z\,z^k)\ \ [2\pi] = \arg z + \arg z^k\ \ [2\pi] = \arg z + k\arg z\ \ [2\pi] = (k+1)\arg z\ \ [2\pi]$.

Conclusion : $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z^n}) = \boldsymbol{n}\,\mathbf{arg}(\boldsymbol{z})\ \ [\boldsymbol{2\pi}]$ pour tout n entier naturel non nul.

Le quotient d'un module est égal au module des quotients :

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} \times \frac{x' - iy'}{x' - iy'} = \frac{xx' + yy' + i(yx' - xy')}{x'^2 + y'^2}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(xx')^2 + (yy')^2 + 2xx'yy' + (x'y)^2 + (xy')^2 - 2xx'yy'}{(x'^2 + y'^2)^2}}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\frac{(xx')^2 + (yy')^2 + (x'y)^2 + (xy')^2}{(x'^2 + y'^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2}}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)}{(x'^2 + y'^2)}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{|z|}{|z'|}$$

L'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments, à 2π près :

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|e^{i\theta}}{|z'|e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i\theta}e^{-i\theta'} = \left|\frac{z}{z'}\right|\ e^{i(\theta-\theta')}$$

On a donc $\mathbf{arg}(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z'}}) = \mathbf{arg}\,\boldsymbol{z} - \mathbf{arg}\,\boldsymbol{z'}\ [\boldsymbol{2\pi}]$