Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$

Exemple 1 : on obtient un imaginaire pur (orthogonalité)

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B, C sont les points du plan d'affixe respective $a = 1 + i, b = 2 + 3i, c = -1 + 2i$.
Calculer le module et un argument de $\frac{c-a}{b-a}$, interpréter graphiquement le résultat.

$c - a = -1 + 2i - 1 - i = -2 + i$

$b - a = 2 + 3i - 1 - i = 1 + 2i$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+i}{1+2i}$$

$$= \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{1+4}$$

$$= \frac{5i}{5}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = i$$

Ainsi, on a que $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1$ et $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = Arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Interprétation géométrique du module :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB} = 1 \quad \text{donc} \quad AC = AB$$

Interprétation géométrique de l'argument :

$$Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Dans ce cas, ayant un point en commun, on en déduit que l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

Conclusion : le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

Exemple 2 : on obtient un réel (parallélisme ou alignement).

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B, C sont les points du plan d'affixe respective $a = 1 + i, b = 2 + 3i, c = -1 - 3i$.
Calculer le module et un argument de $\frac{c-a}{b-a}$, interpréter graphiquement le résultat.

$c - a = -1 - 3i - 1 - i = -2 - 4i$

$b - a = 2 + 3i - 1 - i = 1 + 2i$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2-4i}{1+2i}$$

$$= \frac{-2-4i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i-4i-8}{1+4}$$

$$= -\frac{10}{5}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = -2$$

Ainsi, on a que $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |-2| = 2$ et $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = Arg(-2) = \pi\ [2\pi]$.

Interprétation géométrique du module :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB} = 2 \quad \text{donc} \quad AC = 2AB$$

Interprétation géométrique de l'argument :

$$Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi\ [2\pi]$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Ce qui signifie que les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Dans notre cas, elles ont un point en commun A. On en conclut que les points A, B, C sont alignés.

Ainsi, A est situé sur le segment $[BC]$ de telle façon que $AC = 2AB$.