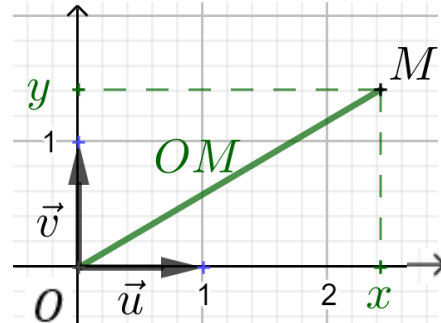


## Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe. Ensembles de points.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

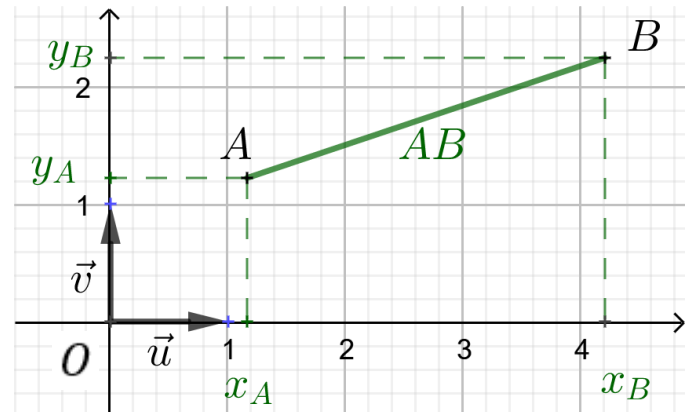
Soit  $M(z_M)$  un point du plan, posons  $z_M = x + iy$ .

$$OM = |z_M - 0| = |z_M| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Soient  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  deux points du plan.

$$\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| = |(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)| \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$



Conséquences :

Le cercle de centre  $A(z_A)$  et de rayon  $k$  est l'ensemble des points  $M(z_M)$  du plan tels que  $AM = k$ .

C'est donc l'ensemble des points  $M(z_M)$  tels que  $|z_A - z_M| = k$ .

C'est donc l'ensemble des points  $M(z_M)$  tels que :

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = k^2$$

La médiatrice du segment  $AB$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $AM = BM$ .

C'est donc l'ensemble des points  $M(z_M)$  tels que  $|z_A - z_M| = |z_B - z_M|$ .

Exemples d'application :

- Soient  $A, B, C$  les points d'affixe respective  $a = 2 + i, b = 6 + 3i, c = 1 + 3i$ . Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .
- Soient  $A, B$  les points d'affixe respective  $a = 1 + 2i$  et  $b = -2 + i$ . Déterminer l'équation réduite de la médiatrice du segment  $[AB]$ .

Solution des exemples d'application :

- a) Soient  $A, B, C$  les points d'affixe respective  $a = 2 + i, b = 6 + 3i, c = 1 + 3i$ . Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

$$AB = |b - a| = |6 + 3i - 2 - i| = |4 + 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$BC = |c - b| = |1 + 3i - 6 - 3i| = |-5| = 5$$

$$CA = |a - c| = |2 + i - 1 - 3i| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

On observe que  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

- b) Soient  $A, B$  les points d'affixe respective  $a = 1 + 2i$  et  $b = -2 + i$ . Déterminer l'équation réduite de la médiatrice du segment  $[AB]$ .

Posons  $z = x + iy$ , soit  $M$  son image. Dire que  $M$  est un point de la médiatrice du segment  $[AB]$  équivaut à dire que  $AM = BM$ , ou encore, que  $AM^2 = BM^2$

$$BM^2 = |x + iy + 2 - i|^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$AM^2 = |x + iy - 1 - 2i|^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

On a donc :

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$4x - 2y + 5 = -2x - 4y + 5$$

$$4x - 2y = -2x - 4y$$

$$6x + 2y = 0$$

$$y = -3x$$

La médiatrice du segment  $[AB]$  est la droite d'équation  $y = -3x$ .