Résoudre une équation du troisième degré

Méthode : on utilise la factorisation (mise en évidence d'un facteur commun, identité remarquable, racine évidente ou connue) puis on résout une équation produit nul.

Un exemple : résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2z^3 - 3z^2 - z + 4 = 0$

On observe que (-1) est une racine évidente :

$$2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 4 = -2 - 3 + 1 + 4 = 0$$

donc $2z^3 - 3z^2 - z + 4$ est factorisable par $(z+1)$

on cherche donc a, b, c tels que $(z+1)(az^2 + bz + c) = 2z^3 - 3z^2 - z + 4$

$(z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c$

Deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -3 \\ b + c = -1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

L'équation peut donc s'écrire sous la forme $(z+1)(2z^2 - 5z + 4) = 0$

Résolution de $z + 1 = 0$: on a une solution unique $z = -1$.

Résolution de $2z^2 - 5z + 4 = 0$:

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7$, le discriminant négatif admet deux racines carrées complexes $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$; l'équation $2z^2 - 5z + 4 = 0$ admet deux racines complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{7}}{2a} = \frac{5 - i\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{7}}{2a} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{4}$

Vérification :

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{5 - i\sqrt{7}}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5 - i\sqrt{7}}{4} + 4 &= 2 \times \frac{25 - 7 - 10i\sqrt{7}}{16} + \frac{-25 + 5i\sqrt{7}}{4} + \frac{4 \times 16}{16} \\ &= \frac{36 - 20i\sqrt{7} - 100 + 20i\sqrt{7} + 64}{16} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{5 + i\sqrt{7}}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5 + i\sqrt{7}}{4} + 4 &= 2 \times \frac{25 - 7 + 10i\sqrt{7}}{16} + \frac{-25 - 5i\sqrt{7}}{4} + \frac{4 \times 16}{16} \\ &= \frac{36 + 20i\sqrt{7} - 100 - 20i\sqrt{7} + 64}{16} = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation $2z^3 - 3z^2 - z + 4 = 0$ admet trois racines distinctes : -1 ; $\frac{5 - i\sqrt{7}}{4}$; $\frac{5 + i\sqrt{7}}{4}$.