Factoriser un polynôme par $(z - a)$

Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$

Le polynôme $z^n - a^n$ se factorise par $z - a$ de la façon suivante :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \ \dots + a^{n-3}z^2 + a^{n-2}z + a^{n-1})$$

On observe que le deuxième facteur est une somme de la forme $a^k z^{n-k}$, avec n degré de l'expression de départ et k variant de 0 à n, on peut donc écrire :

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} z^{n-k}$$

Application directe : identités remarquables :

$$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$$
$$z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + ab + b^2)$$
$$z^4 - a^4 = (z-a)(z^3 + az^2 + a^2z + a^3)$$

Exemple d'utilisation :
Factorisation de $z^5 - i$:
$z^5 - i = z^5 - i^5 = (z-i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4) = (z-i)(z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1)$

Factoriser un polynôme grâce à une racine évidente

Soit P un polynôme de degré n, soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$ (racine évidente ou valeur connue), alors $P(z)$ est factorisable par $(z - a)$.
Il existe donc un polynôme $Q(z)$ de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z-a) \times Q(z)$.

Exemple d'utilisation :

Soit $P(z) = -z^3 + 2iz^2 + (1-i)z - i$. Chercher une racine évidente, puis factoriser $P(z)$.

$P(1) = -1^3 + 2i + 1 - i - i = 0$ donc 1 est une racine évidente de P.

Il existe donc un polynôme Q de degré 2 $Q(z) = az^2 + bz + c$, avec $a, b, c \ \in \mathbb{C}, a \neq 0$, tel que :
$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c = -z^3 + 2iz^2 + (1-i)z - i$

Par identification des variables, on a :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - a = 2i \\ c - b = 1 - i \\ -c = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2i - 1 \\ c = i \end{cases}$$

Donc $Q(z) = -z^2 + (2i-1)z + i$
Donc $P(z) = (z-1)(-z^2 + (2i-1)z + i)$