Equations du second degré

Equation de type $\boldsymbol{z^2 = -k}$, $\boldsymbol{k \epsilon \mathbb{R}_+^*}$

Les solutions de cette équation sont : $z_1 = i\sqrt{k}$ et $z_2 = -i\sqrt{k}$.

Démonstration : soit $z = a + ib$ une solution complexe de l'équation $z^2 = -k$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -k$, or deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc $\begin{cases} a^2 - b^2 = -k \\ 2ab = 0 \end{cases}$
Comme on a $k \neq 0$ on ne peut pas avoir simultanément $a = 0$ et $b = 0$.
On a donc deux possibilités : soit $a = 0$, soit $b = 0$.
Cas n°1 :
$a = 0$, alors $-b^2 = -k$ donc $b^2 - k = 0$ d'où $\left(b - \sqrt{k}\right)\left(b + \sqrt{k}\right) = 0$ donc $b = \sqrt{k}$ ou $b = -\sqrt{k}$, ce qui donne $z_1 = i\sqrt{k}$ et $z_2 = -i\sqrt{k}$
Cas n°2 :
$b = 0$, alors $a^2 = -k$, a étant un nombre réel, c'est impossible.
Conclusion : l'équation $z^2 = -k$, possède deux solutions complexes :

$$z_1 = i\sqrt{k} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{k}.$$

Exemple d'utilisation :
Les solutions de $z^2 = -9$ sont $3i$ et $-3i$.

Equation du second degré à coefficients réels et discriminant négatif :

$az^2 + bz + c = 0$, $a \epsilon \mathbb{R}^*, b \epsilon \mathbb{R}$, $c \epsilon \mathbb{R}$; $\Delta < 0$, posons δ une des racines complexes de Δ.

Les solutions de cette équation sont : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

Exemple d'utilisation :

$4z^2 - 2z + 1 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 4 - 16 = -12 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes ; on cherche δ tel que $\delta^2 = -12$, on a donc deux valeurs possibles $2i\sqrt{3}$ ou $-2i\sqrt{3}$, choisissons par exemple $\delta = 2i\sqrt{3}$.

Les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

Calculer les racines carrées complexe d'un nombre.

Méthode : supposons que l'on cherche la racine d'un nombre complexe $z = a + ib$

- ✓ on pose un nombre complexe $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = z$
- ✓ on écrit un système de trois équations, deux équations données par identification des parties réelles et imaginaires entre δ et z, on trouve la troisième équation avec $|\delta|^2 = |z|$
- ✓ on résout le système très simplement, et on a la/les racines complexes d'un nombre complexe

Un exemple : calculer la racine carrée complexe de $3 + 4i$.

Réponse : on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = 3 + 4i$. Or $\delta^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
Par identification des parties réelles et imaginaires,
on obtient deux équations $x^2 - y^2 = 3$ et $2xy = 4$ soit $xy = 2$.
Ajoutons à cela $|\delta|^2 = |3 + 4i|$ qui donne la troisième égalité à ajouter au système :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

D'où :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

La somme entre la première et la troisième ligne donne $2x^2 = 8$ donc $x^2 = 4$ d'où $x = 2$ ou $x = -2$
On obtient alors, à l'aide de la deuxième ligne, $y = -1$ si $x = -2$; ou $y = 1$ si $x = 2$.
Après vérification des solutions dans le système, on peut en déduire que les deux racines carrées complexes du nombre $3 + 4i$ sont les nombres $\delta_1 = 2 + i$ et $\delta_2 = -2 - i$.

Equation du second degré à coefficients complexes :

Méthode : pour déterminer les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$
on commence par calculer le discriminant complexe Δ, puis on détermine δ tel que $\delta^2 = \Delta$, les deux solutions sont alors $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

Un exemple : résoudre l'équation $z^2 + (4 + i)z + i + 3 = 0$.

Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (4 + i)^2 - 4 \times 1 \times (i + 3) = 16 - 1 + 8i - 4i - 12 = 3 + 4i$
On recherche δ tel que $\delta^2 = 3 + 4i$ et on trouve $\delta_1 = 2 + i$ et $\delta_2 = -2 - i$ (calculs précédents).
Notons δ une des deux racines de Δ, par exemple $\delta = 2 + i$
Les deux solutions de l'équation $z^2 + (4 + i)z + i + 3 = 0$ sont :

$$\boldsymbol{z_1} = \frac{\boldsymbol{-b-\delta}}{\boldsymbol{2a}} = \frac{-(4 + i) - 2 - i}{2} = \frac{-6 - 2i}{2} = -3 - i$$

$$\boldsymbol{z_2} = \frac{\boldsymbol{-b+\delta}}{\boldsymbol{2a}} = \frac{-(4 + i) + 2 + i}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vérification : $(-3 - i)^2 + (4 + i)(-3 - i) + i + 3 = 9 - 1 + 6i - 12 + 1 - 7i + i + 3 = 0$
$(-1)^2 + (4 + i)(-1) + i + 3 = 1 - 4 - i + i + 3 = 0$