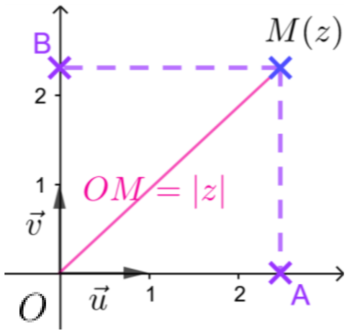
Interpréter géométriquement le module. Calculer un argument.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On appelle image du nombre complexe z le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit alors que z est l'affixe du point Z.
Notons $A(a)$ et $B(ib)$.

Représentation graphique :



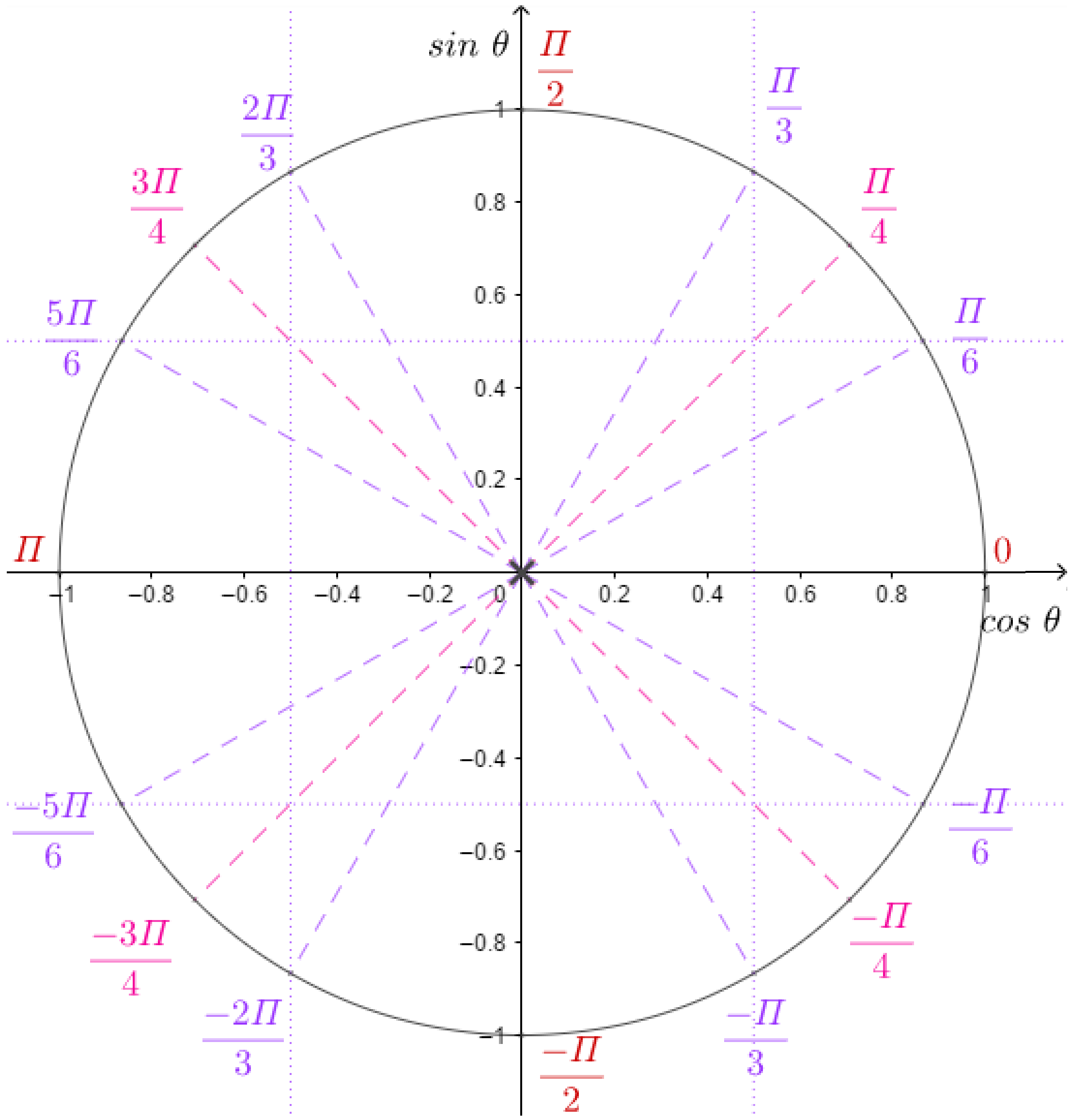
Le repère étant orthonormé, le triangle OAM est un triangle rectangle.

Interprétation géométrique du module :
Dans le triangle rectangle OAM rectangle en A, je peux utiliser le théorème de Pythagore.
$OM^2 = OA^2 + MA^2$ donne $OM = \sqrt{OA^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Argument d'un nombre complexe.
Le triangle OAM est un triangle rectangle. On peut donc utiliser la trigonométrie.
On a : $\cos \widehat{AOM} = \frac{OA}{OM} = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \widehat{AOM} = \frac{AM}{OM} = \frac{BO}{OM} = \frac{b}{|z|}$

Définition : un argument du nombre complexe $z = a + ib$ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$. Ce nombre, noté $\arg(z)$, est défini à 2π près. On appelle argument principal celui qui est compris dans $]-\pi\,;\,\pi]$. Pour calculer $\arg(z)$, on cherche le nombre θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

Exercice-exemple : Soit $z = -1 + i$. Calculer le module et un argument de z.
Réponse :
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$ donc tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ainsi $\theta = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0