

Résoudre une équation simple avec des nombres complexes

Étudions quelques exemples de résolution d'équations simples :

Exemple 1

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $5z + 3i = 2 - i + 3z$

Réponse :

$$5z + 3i = 2 - i + 3z$$

$$5z - 3z = 2 - i - 3i$$

$$2z = 2 - 4i$$

$$z = 1 - 2i$$

Exemple 2

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation E_2 suivante : $2z + 3i\bar{z} = 4 - i$

Réponse :

Posons $z = a + ib$, alors $\bar{z} = a - ib$

$$2z + 3i\bar{z} = 2(a + ib) + 3i(a - ib)$$

$$= 2a + 2ib + 3ia + 3b$$

$$= 2a + 3b + i(3a + 2b)$$

$$2z + 3i\bar{z} = 3 - i \Leftrightarrow 2a + 3b + i(3a + 2b) = 3 - i$$

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases}$$

Résolution du système :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 9b = 9 \\ -6a - 4b = 2 \end{cases}$$

$$5b = 7 \Leftrightarrow b = \frac{7}{5}$$

$$2a + 3b = 3 \Leftrightarrow 2a = 3 - 3b = \frac{15}{5} - \frac{21}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \times \frac{-6}{5} = \frac{-3}{5}$$

Vérification des solutions du système :

$$2a + 3b = 2 \times \frac{-3}{5} + 3 \times \frac{7}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$3a + 2b = 3 \times \frac{-3}{5} + 2 \times \frac{7}{5} = -\frac{9}{5} + \frac{14}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solution de l'équation E_2 : $2z + 3i\bar{z} = 4 - i$

L'équation admet pour solution $z = a + ib = -\frac{3}{5} + i\frac{7}{5}$ et donc $\bar{z} = -\frac{3}{5} - i\frac{7}{5}$