

## Calculer avec les Nombres Complexes

L'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres  $z$  de la forme  $z = a + ib$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $i^2 = -1$ . On note  $Re(z) = a$  la partie réelle de  $z$  et  $Im(z) = b$  sa partie imaginaire.

Soient  $z = a + ib, z' = a' + ib'$  deux nombres complexes (non nuls) et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Egalité** :  $z = z' \Leftrightarrow a = a'$  et  $b = b'$

**Addition** :  $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

exemple :  $3 - 2i - 5 + 6i = -2 + 4i$

**Multiplication par un réel** :  $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$

exemple :  $3(-1 + i) = -3 + 3i$

**Multiplication** entre deux nombres complexes :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib')$$

$$= aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

exemple :  $z = (2 - 3i)(-1 + 5i)$

$$z = -1 + 15 + 10i + 3i$$

$$z = 14 + 13i$$

**Inverse** d'un nombre complexe non nul :

exemple :  $z = 3 + 2i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 + 2i} = \frac{3}{9 + 4} - \frac{2i}{9 + 4} = \frac{3}{13} - \frac{2i}{13}$$

Vérification :

$$\left(\frac{3}{13} - \frac{2i}{13}\right)(3 + 2i) = \frac{9}{13} + \frac{6i}{13} - \frac{6i}{13} + \frac{4}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

**Division** : diviser par un nombre complexe non nul c'est multiplier par son inverse  $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

**Conjugué** : on appelle conjugué de  $z = a + ib$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  défini par :  $\bar{z} = a - ib$

Par exemple :  $\overline{4 - 3i} = 4 + 3i$  ;  $\overline{-2 - i} = -2 + i$  ;  $\overline{5 + 2i} = 5 - 2i$  ;  $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$

Propriétés :  $Re(z) = Re(\bar{z})$  ;  $Im(z) = -Im(\bar{z})$  ;  $z + \bar{z} = 2 Re(z)$  ;  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$  ;  $\bar{\bar{z}} = z$  ;  $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$

Utilité : on peut, par exemple, utiliser le conjugué pour retirer le  $i$  du dénominateur.

$$z = \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{1 + i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 + 1} = \frac{1 + 3i}{5}$$

**Module** : on appelle module du nombre complexe  $z$  le nombre réel  $|z|$  défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Par exemple  $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

**Une petite propriété utile** :

Pour tout nombre complexe  $z \neq 1$  on a :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Vérification :  $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z + z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots - z^n + z^n - z^{n+1}$