Calculer la dérivée d'une fonction de type ax^n

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
telle que $f(x) = ax^n$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note f' sa fonction dérivée.

$$\boxed{f'(x) = anx^{n-1}}$$

Exemples d'utilisation :

$$(x^3)' = 3x^2 \quad ; \quad (5x^2)' = 5 \times 2x = 10x \quad ; \quad \left(\frac{3}{4}x^4\right)' = \frac{3}{4} \times 4x^3 = 3x^3$$

Avec une fonction polynomiale : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Ainsi :

$$\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 4\right)' = \frac{4}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 = 4x^2 - 4x + 5$$

Observations :

La formule fonctionne également si on étend $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{a}{x} = ax^{-1} \qquad \frac{a}{x^2} = ax^{-2} \qquad \ldots$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \left(\frac{3}{x^2}\right)' = (3x^{-2})' = 3 \times (-2)x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$$

$$\left(\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x}\right)' = (5x^{-2} - 3x^{-1})' = 5 \times (-2)x^{-3} - 3 \times (-1)x^{-2} = -10x^{-3} + 3x^{-2} = -\frac{10}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

On pourra retenir les formes générales suivantes : $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$ et que $\left(\frac{a}{x^2}\right)' = -\frac{2a}{x^3}$

La formule fonctionne également pour les racines carrées, en utilisant $n = \frac{1}{2}$ pour $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(5\sqrt{x}\right)' = \left(5x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{5}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad -8\sqrt{x} = -\frac{4}{\sqrt{x}}$$

On pourra retenir que : $\left(a\sqrt{x}\right)' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$