THEOREME DE THALES et sa réciproque

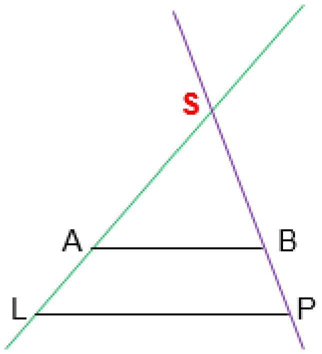
1°) Théorème de Thalès

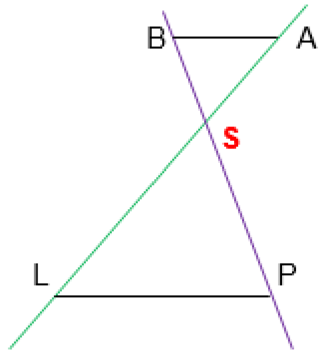
On dit que l'on a une configuration du théorème de Thalès lorsque l'on est dans une situation qui permet d'utiliser le théorème de Thalès.

Le théorème de Thalès permet de calculer une mesure manquante lorsque l'on a une configuration du théorème de Thalès.

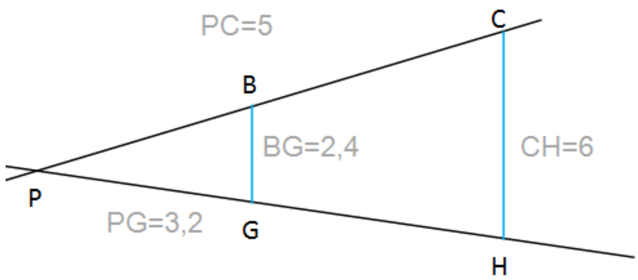
Si deux droites (LA) et (PB) sécantes en S sont coupées par deux parallèles (AB) et (LP), alors, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{SA}{SL} = \frac{SB}{SP} = \frac{AB}{LP} \quad \text{ou} \quad \frac{SL}{SA} = \frac{SP}{SB} = \frac{LP}{AB}$$





Exemple d'utilisation :
les droites bleues sont parallèles entre elles.



Calcul de PH et de BG dans le triangle PCH :

Les droites (BC) et (GH) sont sécantes en P et sont coupées par les parallèles (BG) et (CH).

Alors, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PG}{PH} = \frac{BG}{CH}$$

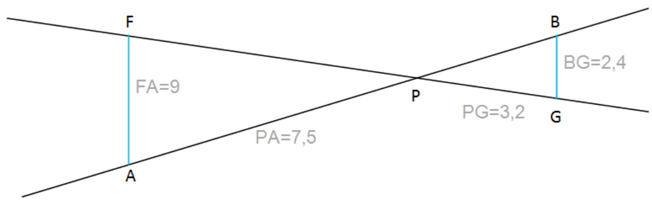
Soit :

$$\frac{PB}{5} = \frac{3{,}2}{PH} = \frac{2{,}4}{6}$$

J'ai donc $PB = \frac{5 \times 2{,}4}{6} = 2$

et $PH = \frac{3{,}2 \times 6}{2{,}4} = 8$

Exemple d'utilisation : les droites bleues sont parallèles entre elles.



Calcul de PA et de BG dans le « papillon » délimité par (FA) et (BG) :

Les droites (FG) et (AB) sont sécantes en P et sont coupées par les parallèles (FA) et (BG).

Alors, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{PG}{PF} = \frac{PB}{PA} = \frac{BG}{AF}$$

Soit :

$$\frac{3{,}2}{PF} = \frac{PB}{7{,}5} = \frac{2{,}4}{9}$$

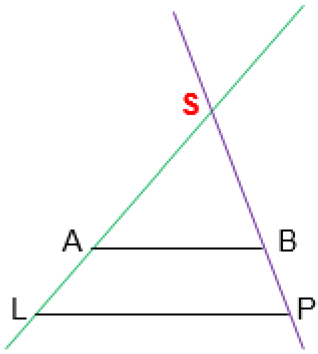
J'ai donc $PF = \frac{3{,}2 \times 9}{2{,}4} = 12$

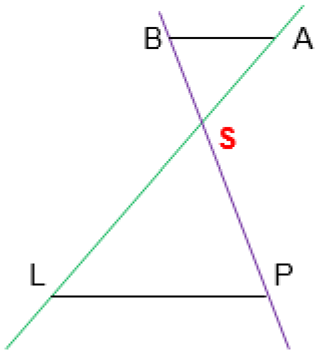
et $PB = \frac{7{,}5 \times 2{,}4}{9} = 2$

2°) Réciproque ou Contraposée du Théorème de Thalès.

La **réciproque** du théorème de Thalès permet de démontrer que deux droites sont parallèles lorsque l'on a une configuration de Thalès, et que l'on connaît les mesures nécessaires.

Considérons que l'on soit dans une des deux configurations suivantes :





Et considérons que l'on connaisse les mesures suivantes :

$$SA = 4 \quad ; \quad SL = 5 \quad ; \quad SB = 3 \quad ; \quad SP = 3{,}75$$

Calculons les rapports suivants :

$$\frac{SA}{SL} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{SB}{SP} = \frac{3\times 100}{3{,}75\times 100} = \frac{300 \div 75}{375 \div 75} = \frac{4}{5}$$

On observe que :

$$\frac{SA}{SL} = \frac{SB}{SP}$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (LP) sont parallèles.

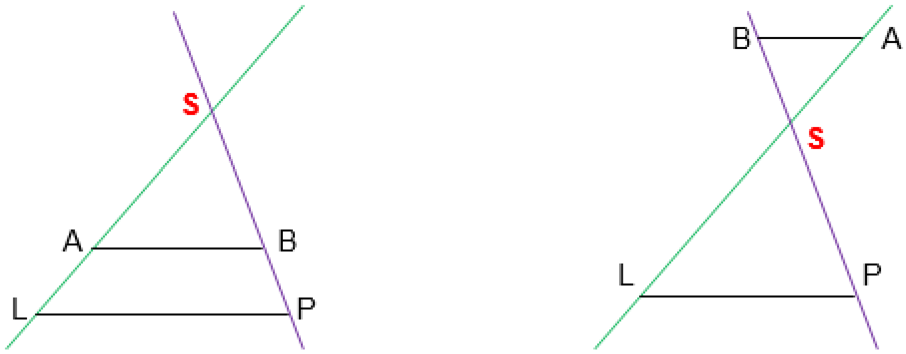
Remarque : pour vérifier que les deux quotients soient égaux, on aurait aussi pu tester l'égalité du produit en croix. En effet, rappelons la règle de calcul suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc, \quad \text{avec} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Donc on aurait pu calculer $SA\times SP = 4\times 3{,}75 = 15$
Puis $SL\times SB = 5\times 3 = 15$
Et en déduire que $SA\times SP = SL\times SB$ donc on a bien $\frac{SA}{SL} = \frac{SB}{SP}$
d'après la réciproque du théorème de Thalès, les deux droite (AB) et (LP) sont parallèles.

La **contraposée** du théorème de Thalès permet de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles lorsque l'on a une configuration de Thalès et que l'on connaît les mesures nécessaires.

Considérons que l'on soit dans une des deux configurations suivantes :



Et considérons que l'on connaisse les mesures suivantes :

$$SA = 8 \quad ; \quad SL = 10 \quad ; \quad SB = 7 \quad ; \quad SP = 7{,}5$$

Calculons les rapports suivants :

$$\frac{SA}{SL} = \frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{SB}{SP} = \frac{7 \times 10}{7{,}5 \times 10} = \frac{70 \div 5}{75 \div 5} = \frac{14}{15}$$

On observe que :

$$\frac{SA}{SL} \neq \frac{SB}{SP}$$

Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AB) et (LP) ne sont pas parallèles.

Remarque : autre méthode : on veut savoir si les quotients $\frac{SA}{SL}$ et $\frac{SB}{SP}$ sont égaux.

Je calcule donc $SA \times SP = 8 \times 7{,}5 = 60$
Puis $SL \times SB = 10 \times 7 = 70$

Et j'en déduis que $SA \times SP \neq SL \times SB$ donc d'après l'égalité du produit en croix, on a bien $\frac{SA}{SL} \neq \frac{SB}{SP}$ donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les deux droite (AB) et (LP) ne sont pas parallèles.