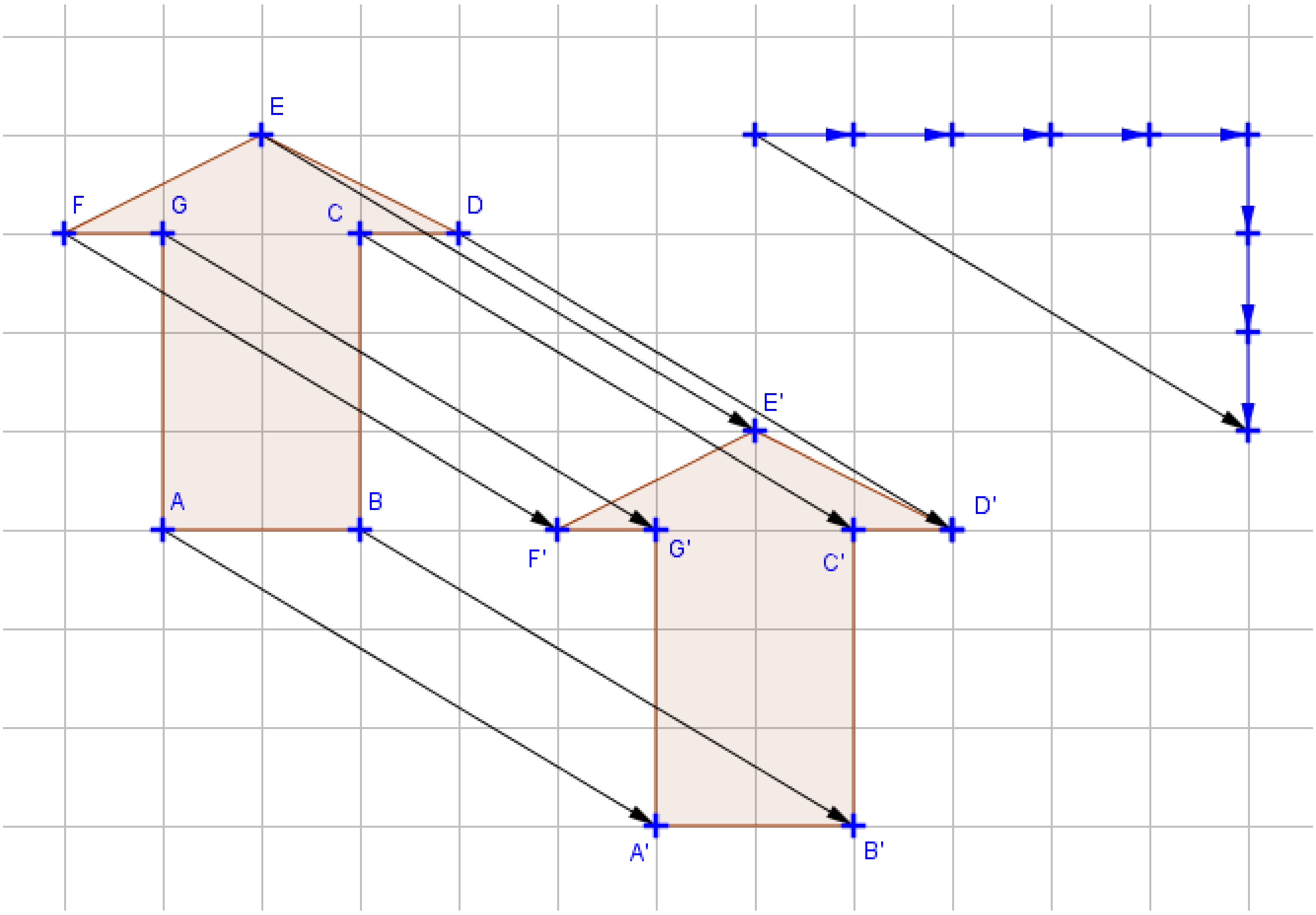
VECTEURS

1°) Translation.

Une translation est un déplacement géométrique qui « fait glisser » un objet d'une place à une autre, sans le tourner ni le modifier.

Exemple : on représente ici un objet ABCDEFG, et son image A'B'C'D'E'F'G' par la translation de 5 carreaux vers la droite et 3 carreaux vers le bas.



On peut modéliser ce déplacement par ***un vecteur***, représenté sur le dessin par une flèche noire.

Chaque point de départ forme avec le point d'arrivée ce même vecteur.

Un vecteur mathématique est composé de trois éléments :

- Un sens, modélisé par une flèche
- Une longueur, que l'on appelle également norme du vecteur
- Une orientation angulaire, que l'on appelle également direction du vecteur

Un vecteur mathématique n'a pas de place précise : on peut le déplacer et le positionner en tout point.

On note souvent un vecteur à l'aide d'une flèche au-dessus d'une lettre minuscule (exemple : vecteur $\vec{u}$) ou de deux lettres majuscules (exemple : vecteur $\overrightarrow{AB}$). Dans le cas de deux lettres majuscules, on modélise un point de départ et le point d'arrivée. Tous les vecteurs représentés ci-dessus sont égaux au vecteur $\vec{u}$.

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ ... sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

Observation : les quadrilatères AA'G'G ; BB'F'F ; CC'B'B ; … sont tous des parallélogrammes.

2°) Définitions et Propriétés élémentaires.

Dans cette partie, nous considérons que A, B, C, D sont quatre points d'un plan.

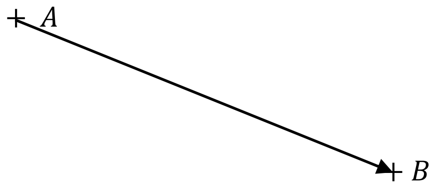
a. Définition.

On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui représente la translation qui transforme A en B.

Un vecteur est entièrement défini par :

- Sa norme
- Sa direction
- Son sens

Exemple : avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représenté ci-contre :



- La norme est AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$
- La direction est (AB)
- Le sens est : de A vers B

b. Egalité de vecteurs.

Lorsque deux vecteurs sont égaux, alors ils ont :

- La même norme
- La même direction
- Le même sens

Conséquence : si $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$

Démonstration :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors ses côtés opposés (AB) et (CD) sont parallèles et de même mesure. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction et la même norme.

De plus, la transformation qui transforme A en B change également D en C. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ayant même direction, même norme, même sens, ils sont égaux et on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par un raisonnement similaire, on démontre que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Propriété : si $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$, alors $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme.

Démonstration : si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ alors les droites (AD) et (BC) sont parallèles, et de plus, AD=BC. On sait également que ces deux vecteurs sont dans le même sens. Un quadrilatère non croisé qui possède deux côté opposés parallèles et de même mesure est un parallélogramme. Donc ABCD est un parallélogramme.

On a donc :

« $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ »	$\Leftrightarrow$	**$\boldsymbol{C}$ est l'image de $\boldsymbol{D}$ par la translation qui transforme $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$**
	$\Leftrightarrow$	**« $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme ».**
	$\Leftrightarrow$	**$[\boldsymbol{AC}]$ et $[\boldsymbol{BD}]$ ont même milieu.**

c. Vecteurs opposés.

Deux vecteurs opposés ont la même norme, la même direction, mais sont de sens contraire.

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

d. Vecteur nul.

La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$. On dit que $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ est le vecteur nul.

Exercices oraux page 302. Pour jeudi : faire exercices 23 et 24 et 25 page 302 + apprendre le cours.

Pour vendredi : ne pas apporter le livre (exercices distribués).

3°) Somme entre deux vecteurs.

On considère la translation t_1 de vecteur $\vec{u}$ et la translation t_2 de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer sur un objet la translation t_1 qui transforme A en A', puis la translation t_2 qui transforme A' en B, revient à appliquer directement la translation t qui transforme A en B.

On appelle vecteur somme et on note $\vec{w}$ le vecteur résultant de la succession des deux translations. On a : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Pour construire le vecteur $\vec{w}$, on doit construire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout.

Avec les points, on obtient l'égalité suivante : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB}$.

Cette égalité s'appelle la relation de Chasles.

Observations :

- L'addition vectorielle est commutative.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
Graphiquement, pour construire un vecteur somme, on peut commencer par le vecteur que l'on souhaite.

- L'élément neutre de l'addition vectorielle est le vecteur nul.

Soit $\vec{u}$ un vecteur, on a $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

- Lorsque l'on additionne un vecteur et son vecteur opposé, on obtient le vecteur nul.

Soit $\vec{u}$ un vecteur, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; soient A, B deux points, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

- On peut additionner plusieurs fois le même vecteur.

Soit $\vec{u}$ un vecteur, $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$

4°) Caractérisations :

On a équivalence entre les propositions suivantes :

I est le milieu de $[AB]$	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
	$\Leftrightarrow$	$2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On a équivalence entre les propositions suivantes :

$ABCD$ est un parallélogramme	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
$ABCD$ est un parallélogramme de centre I	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AI}$

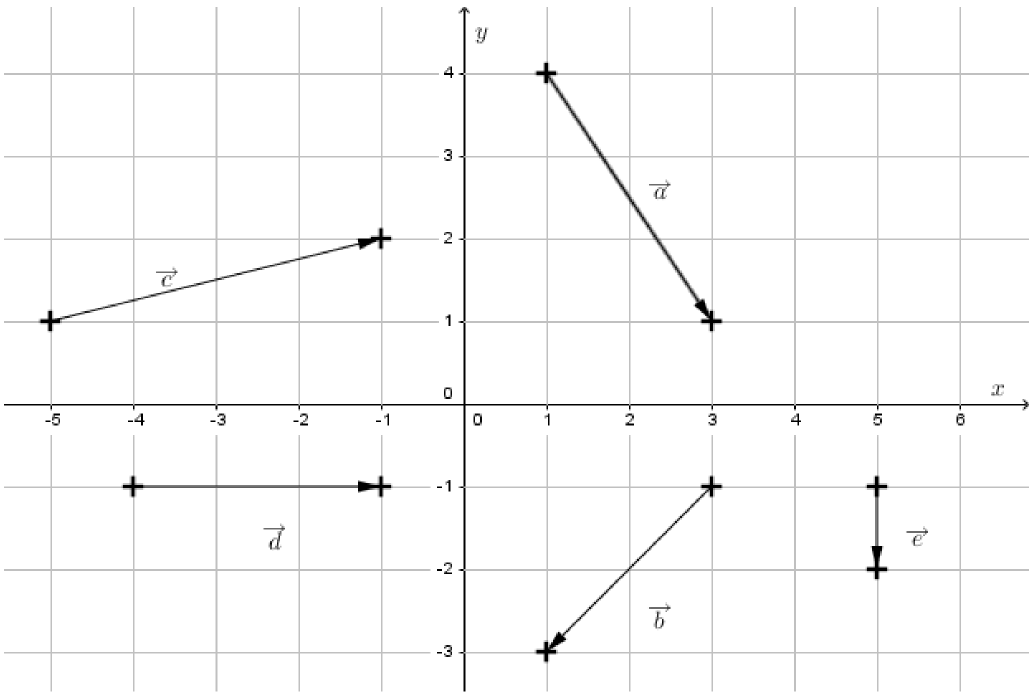
Démonstrations effectuées en classe.

5°) Coordonnées d'un vecteur.

On se place dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On appelle abscisse du vecteur $\vec{u}$ le déplacement horizontal, positif ou négatif.
On appelle ordonnée du vecteur $\vec{u}$ le déplacement vertical, positif ou négatif.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère, voici un représentant des vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{c}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



Calcul de coordonnées :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}}$

Exemple : dans un repère (O,I,J) on donne les points suivants : $A(1;3); B(-3;2); C(0;-2); D(4;-1)$.

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-1\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:

$\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-4\\-2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

2°) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

3°) Déterminer les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CA}$.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$:

$\begin{pmatrix}x_E-x_D\\y_E-y_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_E-4\\y_E-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E-4\\y_E+1\end{pmatrix}$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$:

$\begin{pmatrix}x_A-x_C\\y_A-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0\\3-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CA}$ donc leurs coordonnées sont égales, et on a : $\begin{pmatrix}x_E-4\\y_E+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

D'où : $\begin{cases}x_E-4=1\\y_E+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=1+4\\y_E=5-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=5\\y_E=4\end{cases}$ donc le point E a pour coordonnées : $E(5;4)$.

Propriétés : soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

Vecteurs égaux : $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}$

Vecteur opposé : $-\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$

Somme de deux vecteurs $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$

Produit des coordonnées par un réel : $3\vec{u}\begin{pmatrix}3a\\3b\end{pmatrix}$

Propriété de linéarité : $5\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix}5a-2a'\\5b-2b'\end{pmatrix}$

Exemples : on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

ici, les vecteurs ne sont pas égaux, $\vec{u}\neq\vec{v}$

$-\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $-\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1\\3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$

$3\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times(-2)\\3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$

$5\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10-2\\15-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$

Applications : page 304 + exercices photocopiés distribués. Suite du cours mis en ligne ultérieurement.