

1°) Un programme de calcul.

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Calculer le double de ce nombre.
- Mettre le résultat au carré.
- Soustraire du résultat le quadruple du nombre de départ.
- Ajouter 1 au résultat.

On teste ce programme sur quelques valeurs numériques :

$$3 \quad \mapsto \quad 2 \times 3 = 6 \quad \mapsto \quad 6^2 = 36 \quad \mapsto \quad 36 - 12 = 24 \quad \mapsto \quad 24 + 1 = 25$$

Lorsque le nombre de départ est 3, j'obtiens 25

$$5 \quad \mapsto \quad 2 \times 5 = 10 \quad \mapsto \quad 10^2 = 100 \quad \mapsto \quad 100 - 20 = 80 \quad \mapsto \quad 80 + 1 = 81$$

Lorsque le nombre de départ est 5, j'obtiens 81

$$2 \quad \mapsto \quad 2 \times 2 = 4 \quad \mapsto \quad 4^2 = 16 \quad \mapsto \quad 16 - 8 = 8 \quad \mapsto \quad 8 + 1 = 9$$

Lorsque le nombre de départ est 2, j'obtiens 9

On peut faire une conjecture sur le programme :

« quel que soit le nombre choisi à l'entrée, le programme renvoie toujours le carré d'un nombre »

On teste à présent ce programme sur x :

$$x \quad \mapsto \quad 2 \times x = 2x \quad \mapsto \quad (2x)^2 = 4x^2 \quad \mapsto \quad 4x^2 - 4x \quad \mapsto \quad 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

Lorsque le nombre de départ est x , j'obtiens $(2x - 1)^2$ qui est le carré d'un nombre.

Conclusion : la conjecture est vraie pour tout nombre x .

Soit f la fonction qui, à tout nombre x , fait correspondre le nombre $f(x)$ renvoyé par le programme de calcul. Alors on a :

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

Dans cette expression, x est l'antécédent de $f(x)$ par f
et $f(x)$ est l'image de x par f .

Des exemples précédents on peut écrire :

$f(3) = 25$ donc 25 est l'image de 3 par f et 3 est l'antécédent de 25 par f .

2°) Calculer l'image d'un nombre par une fonction.

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction, connaissant l'expression de la fonction, on doit remplacer la valeur de la variable x par la valeur demandée.

Exemple : on a $f(x) = (2x - 1)^2$, calculer l'image de 3 par f .

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

$$f(3) = (2 \times 3 - 1)^2$$

$$f(3) = (6 - 1)^2$$

$$f(3) = 5^2$$

$$f(3) = 25$$

L'image du nombre 3 par f est 25.

Exercices d'application : page 86 n°7+12 ; page 87 n°19+20 ; page 89 n°33+34

3°) Calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction.

Pour calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction, il faut résoudre une équation.

Exemple : on a $f(x) = (2x - 1)^2$, calculer l'antécédent de 0 par f

Je cherche x tel que $f(x) = 0$

donc tel que $(2x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad (\text{car si le carré d'un nombre est nul, alors ce nombre est nul})$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

L'antécédent de 0 par f est $\frac{1}{2}$.

Exercices d'application : page 89 n°35+36+37

4°) Prouver qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction.

Une lecture graphique n'est pas précise : pour être certain qu'un point appartient effectivement à la courbe représentative d'une fonction, alors il faut le vérifier par calcul.

Méthode : on calcule l'image de l'abscisse, on vérifie si on a bien obtenu l'ordonnée.

Exemple : on a représenté ci-contre la courbe représentative de la

fonction f définie pour tout x par $f(x) = \frac{3x^3}{2} - 6x$

Les points $A(1,5 ; -4)$ et $B(1 ; -4,5)$ appartiennent-ils à la courbe ?

La courbe représentative ne permet pas de répondre avec certitude.

$$f(1,5) = \frac{3 \times 1,5^3}{2} - 6 \times 1,5$$

$$f(1,5) = 1,5 \times 3,375 - 9$$

$$f(1,5) = 5,0625 - 9$$

$$f(1,5) = -3,9375$$

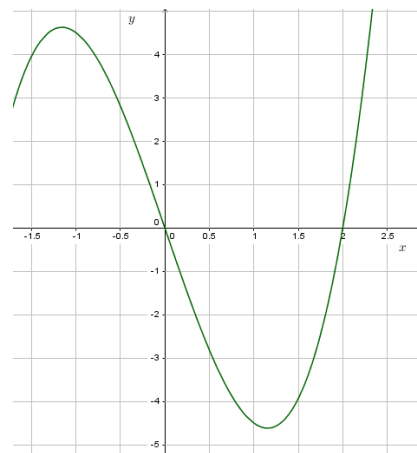
Donc le point $A(1,5 ; -4)$ n'appartient pas à la courbe.

$$f(1) = \frac{3}{2} - 6$$

$$f(1) = 1,5 - 6$$

$$f(1) = -4,5$$

Donc le point $B(1 ; -4,5)$ appartient bien à la courbe.

5°) Calculer la coordonnée manquante d'un point d'une courbe.

Une lecture graphique n'est pas précise : pour connaître la coordonnée manquante d'un point qui est sur la courbe représentative d'une fonction, il faut faire ainsi :

→ Si on connaît l'abscisse, alors on calcule l'image de l'abscisse : c'est l'ordonnée.

→ Si on connaît l'ordonnée, alors on calcule l'antécédent de l'ordonnée : c'est l'abscisse.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto 3x - 5$ et on appelle \mathcal{C} sa courbe représentative.

On sait que le point $A(8 ; y_A)$ et que le point $B(x_B ; -11)$ appartiennent à la courbe \mathcal{C} .

On a donc :

$$f(8) = y_A$$

$$3 \times 8 - 5 = y_A$$

$$24 - 5 = y_A$$

$$19 = y_A$$

$$f(x_B) = -11$$

$$3x_B - 5 = -11$$

$$3x_B = -6$$

$$x_B = -2$$

Conclusion : les points A et B ont pour coordonnées : $A(8 ; 19)$ et $B(-2 ; -11)$.