Chapitre 3 : Développer avec une identité remarquable.

En classe de 4ème, nous avons déjà appris à développer les expressions algébriques de type $k(a+b)$ * et $(a+b)(c+d)$ *.
Nous allons maintenant découvrir trois identités remarquables permettant des développements directs.

** si vous avez oublié comment faire, voir l'annexe en fin de chapitre.*

1°) Carré d'une somme.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

La formule peut aussi se mémoriser de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix}^2 + 2 \times \begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix}^2$$

Exemples d'utilisation :

(vous devez absolument être capable de les refaire. Entraînez-vous à développer de tête)

$$(x+8)^2 = x^2 \quad + \quad 2 \times x \times 8 \quad + \quad 8^2$$
$$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$$

$$(5+3x)^2 = 5^2 \quad + \quad 2 \times 5 \times 3x \quad + \quad (3x)^2$$
$$(5+3x)^2 = 25 + 30x + 9x^2$$

$$(2+x)^2 = 2^2 \quad + \quad 2 \times 2 \times x \quad + \quad x^2$$
$$(2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \quad + \quad 2 \times \frac{x}{3} \times \frac{7}{5} \quad + \quad \left(\frac{7}{5}\right)^2$$
$$\left(\frac{x}{3}+\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{14x}{15} + \frac{49}{25}$$

$$\left(\frac{3x}{5}+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x}{5}\right)^2 \quad + \quad 2 \times \frac{3x}{5} \times \frac{1}{2} \quad + \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{3x}{5}+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9x^2}{25} + \frac{3x}{5} + \frac{1}{4}$$

$$(0{,}5x+4)^2 = (0{,}5x)^2 \quad + \quad 2 \times 0{,}5x \times 4 \quad + \quad 4^2$$
$$(0{,}5x+4)^2 = 0{,}25x^2 + 4x + 16$$

2°) Carré d'une différence.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Attention : la seule différence avec l'identité précédente est le signe du produit interne !

La formule peut aussi se mémoriser de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix}^2 - 2\times\begin{pmatrix}premier \\ terme\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}deuxième \\ terme\end{pmatrix}^2$$

Exemples d'utilisation :

(vous devez absolument être capable de les refaire. Entraînez-vous à développer de tête)

$$(x-8)^2 = x^2 - 2\times x\times 8 + 8^2$$
$$(x-8)^2 = x^2 - 16x + 64$$

$$(5-3x)^2 = 5^2 - 2\times 5\times 3x + (3x)^2$$
$$(5-3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$$

$$(2-x)^2 = 2^2 - 2\times 2\times x + x^2$$
$$(2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$$

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\times\frac{x}{3}\times\frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2$$
$$\left(\frac{x}{3}-\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{14x}{15} + \frac{49}{25}$$

$$\left(\frac{3x}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x}{5}\right)^2 - 2\times\frac{3x}{5}\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{3x}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9x^2}{25} - \frac{3x}{5} + \frac{1}{4}$$

$$(0{,}5x-4)^2 = (0{,}5x)^2 - 2\times 0{,}5x\times 4 + 4^2$$
$$(0{,}5x-4)^2 = 0{,}25x^2 - 4x + 16$$

3°) Expressions de type (a+b)(a−b).

$$(a+b)(a-b) = (a+b)(a-b)$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2$$
$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Attention : cette fois le produit interne a disparu dans le développement, on obtient la différence entre deux carrés

La formule peut aussi se mémoriser de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} deuxième \\ terme \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} deuxième \\ terme \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} deuxième \\ terme \end{pmatrix}^2$$

Remarque : la formule fonctionne de la même façon avec $(a+b)(a-b)$ ou avec $(a-b)(a+b)$.

Exemples d'utilisation :

(vous devez absolument être capable de les refaire. Entraînez-vous à développer de tête)

$$(x-8)(x+8) = x^2 - 8^2$$
$$(x-8)(x+8) = x^2 - 64$$

$$(5+3x)(5-3x) = 5^2 - (3x)^2$$
$$(5+3x)(5-3x) = 25 - 9x^2$$

$$(2-x)(2+x) = 2^2 - x^2$$
$$(2-x)(2+x) = 4 - x^2$$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{7}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2$$
$$\left(\frac{x}{3}+\frac{7}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{7}{5}\right) = \frac{x^2}{9} - \frac{49}{25}$$

$$\left(\frac{3x}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{5}+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{3x}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{9x^2}{25} - \frac{1}{4}$$

$$(0{,}5x+4)(0{,}5x-4) = (0{,}5x)^2 - 4^2$$
$$(0{,}5x+4)(0{,}5x-4) = 0{,}25x^2 - 16$$

4°) Synthèse.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Forme factorisée

Forme développée

Développement

Annexes :

Rappel : $ka + kb = k(a+b)$ et $ka - kb = k(a-b)$

forme développée	forme factorisée
$ka + kb$	$k(a+b)$
$ka - kb$	$k(a-b)$
somme ou différence	produit

$\xleftarrow{\quad\quad\quad\quad\quad}$
développement

Exemples :

Développer les expressions :

$C = 2x(3-4x)$	$D = xy(3x+2y)$
$C = 2x \times 3 - 2x \times 4x$	$D = xy \times 3x + yx \times 2y$
$C = 6x - 8x^2$	$D = 3x^2y + 2xy^2$

Règle de suppression des parenthèses.

On distinguera plusieurs cas, qui dépendent directement de ce qui se trouve juste devant la première parenthèse.

Cas n°1 : si c'est un $+$
Règle de calcul : on retire les parenthèses, rien ne se passe.
Exemples : $3y + (4y^2 - 5) = 3y + 4y^2 - 5$; $8 + (-5x + x^2) = 8 - 5x + x^2$

Cas n°2 : si c'est un $-$
Règle de calcul : on retire les parenthèses, **on oppose TOUS les signes** à l'intérieur des parenthèses.
Exemples : $3y - (4y^2 - 5) = 3y - 4y^2 + 5$; $8 - (-5x + x^2) = 8 + 5x - x^2$

Cas n°3 : si c'est un nombre précédé d'un $+$ ou précédé par rien
Règle de calcul : on développe.
Exemples : $3y(4y^2 - 5) = 12y^3 - 15y$; $8 + 4(-5x + x^2) = 8 - 20x + 4x^2$

Cas n°4 : si c'est un nombre précédé d'un $-$
Règle de calcul : on développe ET on oppose tous les signes.
Exemples : $-3y(4y^2 - 5) = -12y^3 + 15y$; $8 - 4(-5x + x^2) = 8 + 20x - 4x^2$

Annexe : double distributivité : règle générale et différents cas que l'on peut rencontrer.

Règle générale :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

$A = (3x+2)(10+8x)$

$A = 3x \cdot 10 + 3x \cdot 8x + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8x$

$A = 30x + 24x^2 + 20 + 16x$

$A = 24x^2 + 46x + 20$

$B = \left(\frac{2}{5}x + 3\right)(2x+5)$

$B = \frac{2}{5}x \cdot 2x + \frac{2}{5}x \cdot 5 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5$

$B = \frac{4}{5}x^2 + \frac{10}{5}x + 6x + 15$

$B = \frac{4}{5}x^2 + 2x + 6x + 15$

$B = \frac{4}{5}x^2 + 8x + 15$

Cas où on a des nombres négatifs :

$C = (2x-3)(-5-x)$
$C = 2x \cdot (-5) + 2x \cdot (-x) + (-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-x)$
$C = -10x - 2x^2 + 15 + 3x$
$C = -2x^2 - 7x + 15$

$D = (-5x+2)(x-9)$
$D = (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot (-9) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-9)$
$D = -5x^2 + 45x + 2x - 18$
$D = -5x^2 + 47x - 18$

Cas où on a un nombre devant le double produit :

Méthode 1 :
on met des crochets, on calcule le double produit, puis on développe le nombre.
$G = 3(x-5)(2x-7)$
$G = 3\left(2x \cdot x + x \cdot (-7) + (-5) \cdot 2x + (-5) \cdot (-7)\right)$
$G = 3(2x^2 - 7x - 10x + 35)$
$G = 3(2x^2 - 17x + 35)$
$G = 6x^2 - 51x + 105$

Méthode 2
on développe le nombre uniquement dans la première parenthèse, puis on applique les règles de calcul habituelles.

$G = 3(x-5)(2x-7)$

$G = (3x-15)(2x-7)$

…

$G = 6x^2 - 51x + 105$

Voir page suivante : cas où on a un signe – devant le double produit

ANNEXE / pour ceux qui veulent aller un peu plus loin :
le double produit précédé d'un signe négatif

Cas où on a un signe – devant le double produit :

$E = 2x^2 + 4x - 1 - [(3x - 5)(2 - 7x)]$ ⚠ ATTENTION : ajouter des crochets.
$E = 2x^2 + 4x - 1 - [3x \cdot 2 + 3x \cdot (-7x) + (-5) \cdot 2 + (-5) \cdot (-7x)]$
$E = 2x^2 + 4x - 1 - [6x - 21x^2 - 10 + 35x]$
$E = 2x^2 + 4x - 1 - (-21x^2 + 41x - 10)$
$E = 2x^2 + 4x - 1 + 21x^2 - 41x + 10$
$E = 2x^2 + 21x^2 + 4x - 41x - 1 + 10$
$E = 23x^2 - 37x + 9$

Deuxième méthode pour le signe – devant le double produit :
on développe le signe – uniquement dans la première parenthèse, puis on applique les règles habituelles.

$F = -(2x - 8)(4 - 5x)$
$F = (-2x + 8)(4 - 5x)$
$F = (-2x) \cdot 4 + (-2x) \cdot (-5x) + 8 \cdot 4 + 8 \cdot (-5x)$
$F = -8x + 10x^2 + 32 - 40x$
$F = 10x^2 - 48x + 32$