Chapitre 13 : Probabilités.

1°) Vocabulaire.

Définitions	Exemple
On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne connaît le résultat que lorsqu'elle est terminée.	Lancer un dé équilibré (non truqué) à six faces numérotées de 1 à 6, et observer le résultat.
On appelle **issue** un résultat possible de l'expérience.	{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
On appelle **événement** un ensemble d'une ou de plusieurs issues. Remarque : un événement peut être vide, on dit alors que c'est un événement impossible. On dit que les issues réalisent l'événement.	Evénement A : « le nombre obtenu est pair ». A={2 ; 4 ; 6}. Evénement B : « le nombre obtenu est négatif ». B=∅. L'issue « le nombre est 2 » réalise l'événement A.
Lorsqu'un événement est constitué de toutes les issues possibles, on dit qu'il est certain.	Evénement C : « le nombre obtenu est un nombre entier compris entre 1 et 6 ». C={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }.
Lorsqu'un événement n'est constitué que d'une seule issue, on dit que c'est un événement élémentaire.	Evénement D : « le nombre obtenu est 2 ». D={2}.

2°) Probabilité d'un événement.

Lorsque, pour une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même chance d'être réalisées, alors on dit que l'on est dans une situation **d'équiprobabilité**. Dans ce cas, s'il y a n issues, la probabilité qu'une issue soit réalisée est $\frac{1}{n}$.

Exemple 1 : si on lance un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6, les issues sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, et la probabilité de chacune des issues est : $\frac{1}{6}$

Exemple 2 : si on lance une pièce équilibrée, les issues sont PILE ou FACE, et la probabilité de chacune des issues est : $\frac{1}{2}$

Exemple 3 : si on pioche une carte dans un paquet de 32 cartes, les issues sont A♠, 7♠, 8♠, 9♠, 10♠, V♠, D♠, R♠, A♣, 7♣, 8♣, 9♣, 10♣, V♣, D♣, R♣, A♥, 7♥, 8♥, 9♥, 10♥, V♥, D♥, R♥, A♦, 7♦, 8♦, 9♦, 10♦, V♦, D♦, R♦.
La probabilité de chacune des issues est : $\frac{1}{32}$

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.
La probabilité d'un événement est toujours un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On définit les événements suivants :
A : « le nombre est pair ».
B : « le nombre est supérieur ou égal à 3 ».
C : « le nombre est un multiple de 3 ».
Déterminer la probabilité de chacun des événements.

Réponses :
A={2 ; 4 ; 6} et chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{6}$ donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
B={3 ; 4 ; 5 ; 6} et chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{6}$ donc $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
C={3 ; 6} et chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{6}$ donc $p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Cas particuliers :

Lorsque la probabilité d'un événement est 0, on dit que l'événement est **impossible**.
Exemple : on lance un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4,
on considère l'événement A « le nombre obtenu est 8 », on a $p(A) = 0$.
A est un événement impossible.

Lorsque la probabilité d'un événement est 1, on dit que l'événement est **certain**.
Exemple : on lance un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4,
on considère l'événement B « le nombre obtenu est compris entre 1 et 4 », on a $p(B) = 1$.
B est un événement certain.

Applications : exercices page 71

3°) Règles de probabilités

Soit A un événement. Alors l'événement $\bar{A}$ est l'événement qui est réalisé lorsque A ne l'est pas.
(on lit : « A barre »). On dit que $\bar{A}$ est l'événement contraire de A, ou événement complémentaire de A.
Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

M : « le nombre est pair », $M = \{2 ; 4 ; 6\}$, $p(M) = \frac{3}{6}$
L'événement contraire est $\bar{M}$: « le nombre n'est pas pair », $\bar{M} = \{1; 3; 5\}$, $p(\bar{M}) = \frac{3}{6}$

I : « le nombre est inférieur ou égal à deux », $I = \{1 ; 2\}$, $p(I) = \frac{2}{6}$
L'événement contraire est $\bar{I}$: « le nombre est strictement supérieur à deux », $\bar{I} = \{3; 4; 5; 6\}$, $p(\bar{I}) = \frac{4}{6}$

Remarque : $p(M) + p(\bar{M}) = 1$ et $p(I) + p(\bar{I}) = 1$

Règle générale : dans une expérience aléatoire, si E est un événement, alors E est son événement contraire et on a :

$$\boxed{p(E) + p(\bar{E}) = 1}$$

Applications : exercices 30 à 33 p.73

Dans une expérience aléatoire, lorsque deux événements n'ont aucune issue en commun, alors on dit qu'ils sont incompatibles.
Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Les événements A : « le chiffre obtenu est pair » et B : « le chiffre obtenu est impair » sont incompatibles.
Les événements C : « le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 2 » et D : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 4 » sont incompatibles.

Lorsque deux événements A et B sont incompatibles, alors on a : $p(A\ ou\ B) = p(A) + p(B)$.

Exemple : dans notre expérience précédente, on a $p(A) = \frac{3}{6}, p(B) = \frac{3}{6}$, or comme A et B sont incompatibles, alors $p(A\ ou\ B) = p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$.
On a également $C = \{1; 2\}$ donc $p(C) = \frac{2}{6}$ et $D = \{4; 5; 6\}$ donc $p(D) = \frac{3}{6}$ et comme C et D sont incompatibles, alors $p(C\ ou\ D) = p(C) + p(D) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

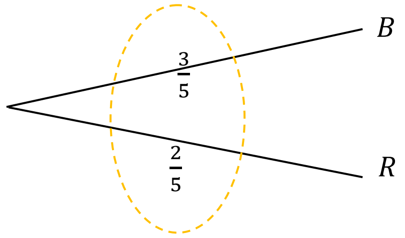
4°) Arbre pondéré.

a. Cas simple.

L'arbre pondéré est un outil qui permet de calculer plus facilement les probabilités dans certaines expériences aléatoires.

Exemple : dans une urne, on compte 3 boules blanches et 2 boules rouges. On réalise l'expérience aléatoire suivante : on pioche une boule et on relève sa couleur.

On peut alors modéliser cette expérience par un « arbre pondéré » : les pondérations correspondent aux probabilités écrites sur chaque branche de l'arbre.



La somme des probabilités présentes sur les branches de l'arbre doit toujours faire 1.

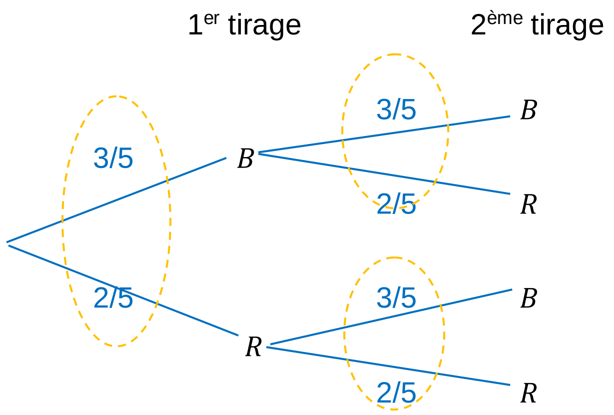
De cet arbre, on peut en déduire que $p(B)=\frac{3}{5}$ et $p(R)=\frac{2}{5}$.

b. Succession d'épreuves aléatoires.

Dans le cas d'une répétition d'épreuve aléatoire, ou d'une succession d'épreuves aléatoires, on peut être amenés à utiliser un arbre qui aura plusieurs niveaux.

Exemple : dans le cas de l'urne précédente, on pioche une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, et on recommence. On dit alors que l'on fait deux tirages successifs avec remise.

L'arbre pondéré correspondant est le suivant :



issue	probabilité
B et B	$p(B\ et\ B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
B et R	$p(B\ et\ R) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
R et B	$p(R\ et\ B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
R et R	$p(R\ et\ R) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

Pour calculer la probabilité d'une issue, on multiplie les probabilités rencontrées lorsque l'on remonte les branches de l'arbre.

On peut utiliser cet arbre pour répondre aux questions suivantes :

Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule soit rouge ?
C'est $p(B\ et\ R) + p(R\ et\ R) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$

Quelle est la probabilité de l'événement M : « au moins une des boules est blanche ».
On passe par l'événement contraire : $\overline{M}$: « aucune boule n'est blanche », $\overline{M} = R\ et\ R$ et $p(\overline{M}) = \frac{4}{25}$
Comme on sait que $p(M) + p(\overline{M}) = 1$ on en déduit que $p(M) = 1 - p(\overline{M}) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$.
Donc la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est $\frac{21}{25}$.

Applications : exercices 24 à 29 pages 72-73