PROBABILITES

1°) Vocabulaire et notations.

On appelle ***expérience aléatoire*** toute expérience dont le résultat ne peut être connu que lorsque l'expérience est terminée.

On appelle ***issue*** de l'expérience un résultat possible de l'expérience.

L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire s'appelle ***l'univers*** associé à l'expérience aléatoire. Il est souvent noté E ou Ω. Les issues sont souvent notées ω_i.

Lorsque chaque issue d'un univers a la même chance d'être réalisée que les autres issues, alors on dit que l'expérience est ***équiprobable***, et chaque issue a alors une probabilité de $\frac{1}{n}$, n étant le nombre d'issues de l'univers.

On appelle ***événement*** tout sous-ensemble de l'univers. On dit qu'un ***événement*** est ***élémentaire*** lorsqu'il n'est réalisé que par une seule issue.

La probabilité d'un événement est toujours un nombre compris entre 0 et 1. Si A est un sous-ensemble d'un univers E associé à une expérience aléatoire, alors

$p(A) = 0 \Leftrightarrow A = \phi \Leftrightarrow A$ est un ***événement impossible*** ;

et $p(A) = 1 \Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow A$ est un ***événement certain***.

On dit que deux événements sont ***incompatibles*** lorsqu'ils n'ont aucune issue permettant de les réaliser simultanément. Tous les événements élémentaires sont incompatibles.

Si A et B sont deux événements incompatibles d'une expérience aléatoire, alors on a :

$$p(A) + p(E) = p(A \text{ ou } E) \text{ et } p(A \text{ et } E) = 0.$$

Lorsque l'on a une situation d'équiprobabilité, si A est un événement de l'univers E, alors

$$p(A) = P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues dans l'univers}}$$

Lorsque la situation n'est pas forcément équiprobable, si A est un événement réalisé par les issues ω_i, alors $p(A) = \sum p(\omega_i)$.

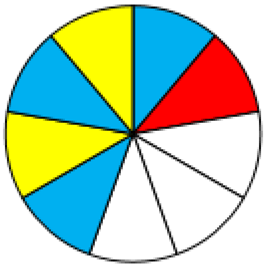
Vocabulaire associé aux expériences :

- On dit qu'un dé ou une pièce est équilibré(e) lorsqu'il (elle) n'est pas truqué(e).
- Dans le cas d'une urne contenant des boules de couleurs ou numérotées, le fait de piocher une boule est appelé : tirage.
- Dans le cas de plusieurs tirages successifs, on dit que l'on effectue les tirages avec remise lorsque les boules sont remises dans l'urne au fur et à mesure, et on dit que l'on effectue des tirages sans remise lorsque l'on ne remet pas les boules dans l'urne au fur et à mesure.

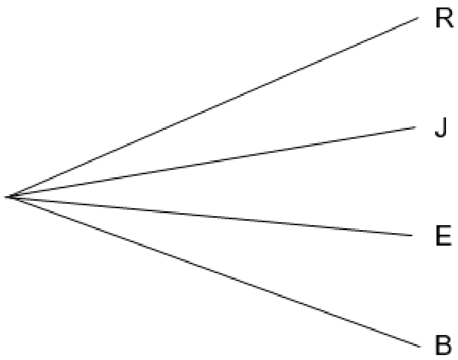
2°) Outils pour les probabilités.

a. Arbre pondéré.

Exemple d'utilisation à un niveau :

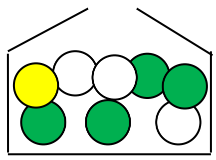


On considère la roue suivante. Tous les secteurs angulaires sont de même mesure.
On fait tourner la roue et on note la couleur obtenue.
On définit les événements suivants :
R : « le secteur angulaire est rouge »
J : « le secteur angulaire est jaune »
E : « le secteur angulaire est bleu »
B : « le secteur angulaire est blanc ».
Compléter l'arbre pondéré.

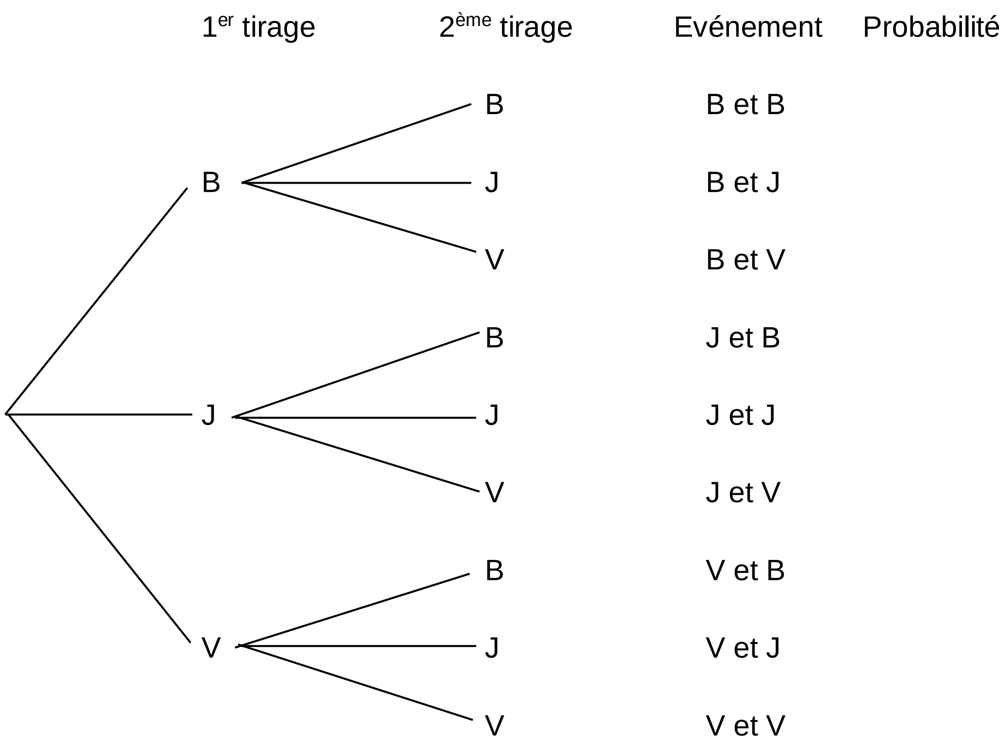


Exemple d'utilisation à plusieurs niveaux :

On considère l'urne ci-contre. On effectue deux tirages sans remise.
On définit les événements suivants :
B : « la boule est blanche »
V : « la boule est verte »
J : « la boule est jaune »
Construire un arbre pondéré.
Donner la probabilité de chacun des événements suivants :



a) A : « La deuxième boule est jaune ».
b) C : « Les deux boules sont de la même couleur ».
c) D : « Au moins une des boules est blanche ».
d) E : « Aucune boule n'est jaune ».



b. Tableau.

Exemple d'utilisation : le lancer de dés.
On lance simultanément un dé bleu et un dé rouge. Chacun des deux dés a six faces numérotées de 1 à 6, et est équilibré. On s'intéresse à la différence positive entre les deux chiffres obtenus.

		Dé rouge					
		1	2	3	4	5	6
Dé bleu	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « on obtient un zéro »
B : « on obtient un nombre pair »
C : « on obtient un nombre supérieur ou égal à 3 »

Exemple d'utilisation : le tableau à double entrée.
Dans une salle de conférence, on compte un total de 250 personnes.
40% des personnes présentes sont des femmes.
70% des femmes présentes ont plus de 40 ans.
Au total, il y a 180 personnes de plus de 40 ans.
Compléter le tableau donné ci-dessous puis répondre aux questions posées.

	Plus de 40 ans	Moins de 40 ans	TOTAL
Homme			
Femme			
TOTAL			250

On sélectionne une personne au hasard dans la salle.
Quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme de moins de quarante ans ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit une personne de plus de quarante ans ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit un homme de plus de quarante ans ?

3°) Calculs de probabilité.

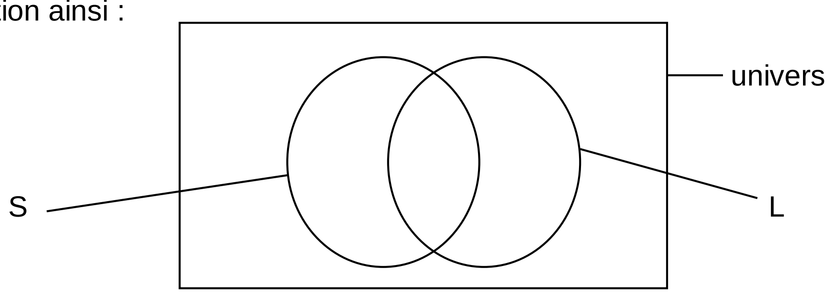
a. Diagramme de Venn.

Parfois, il est intéressant de représenter graphiquement une situation de proportionnalité par ce que l'on appelle un diagramme de Venn.

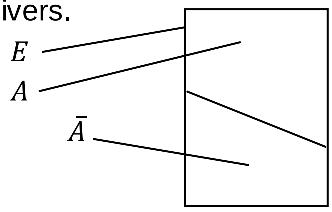
Exemple : 20 personnes se trouvent dans une salle d'attente. Certaines ont un sac à main, certaines portent des lunettes. Certaines personnes n'ont ni sac à main, ni lunettes.

On définit les événements suivants :
S : « la personne a un sac à main »
L : « la personne porte des lunettes »

On représente la situation ainsi :



b. Evénement complémentaire.



Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire, et A un événement de cet univers.
Alors l'événement $\bar{A}$ est l'événement complémentaire de A,
(on dit aussi l'événement contraire de A).
$\bar{A}$ est réalisé par toutes les issues qui ne réalisent pas A.
Si A est certain, alors $\bar{A}$ est impossible. Si A est impossible, alors $\bar{A}$ est certain.
On a :

$\boxed{p(A) + p(\bar{A}) = 1}$ $\boxed{p(A) = 1 - p(\bar{A})}$ $\boxed{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$

c. Réunion et intersection d'événements.

Soient A et B deux événements d'un univers associé à une expérience aléatoire.
On note $A \cup B$ et on lit 'A réunion B' l'événement qui est réalisé lorsqu'au moins un des deux événements A ou B est réalisé. On dit souvent : « A ou B ».
On note $A \cap B$ et on lit 'A inter B' l'événement qui est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés. On dit souvent : « A et B ».

4°) Loi de probabilité.

On appelle la loi de probabilité la donnée de la probabilité associée à chaque issue. Le plus souvent, la loi de probabilité se donne sous la forme d'un tableau.

Rappel : la somme des probabilités de toutes les issues fait toujours 1.