DROITES

1°) Equations du premier degré à deux inconnues.

Une équation du premier degré à deux inconnues est une équation qui se ramène à la forme suivante :

$$ax + by = c$$

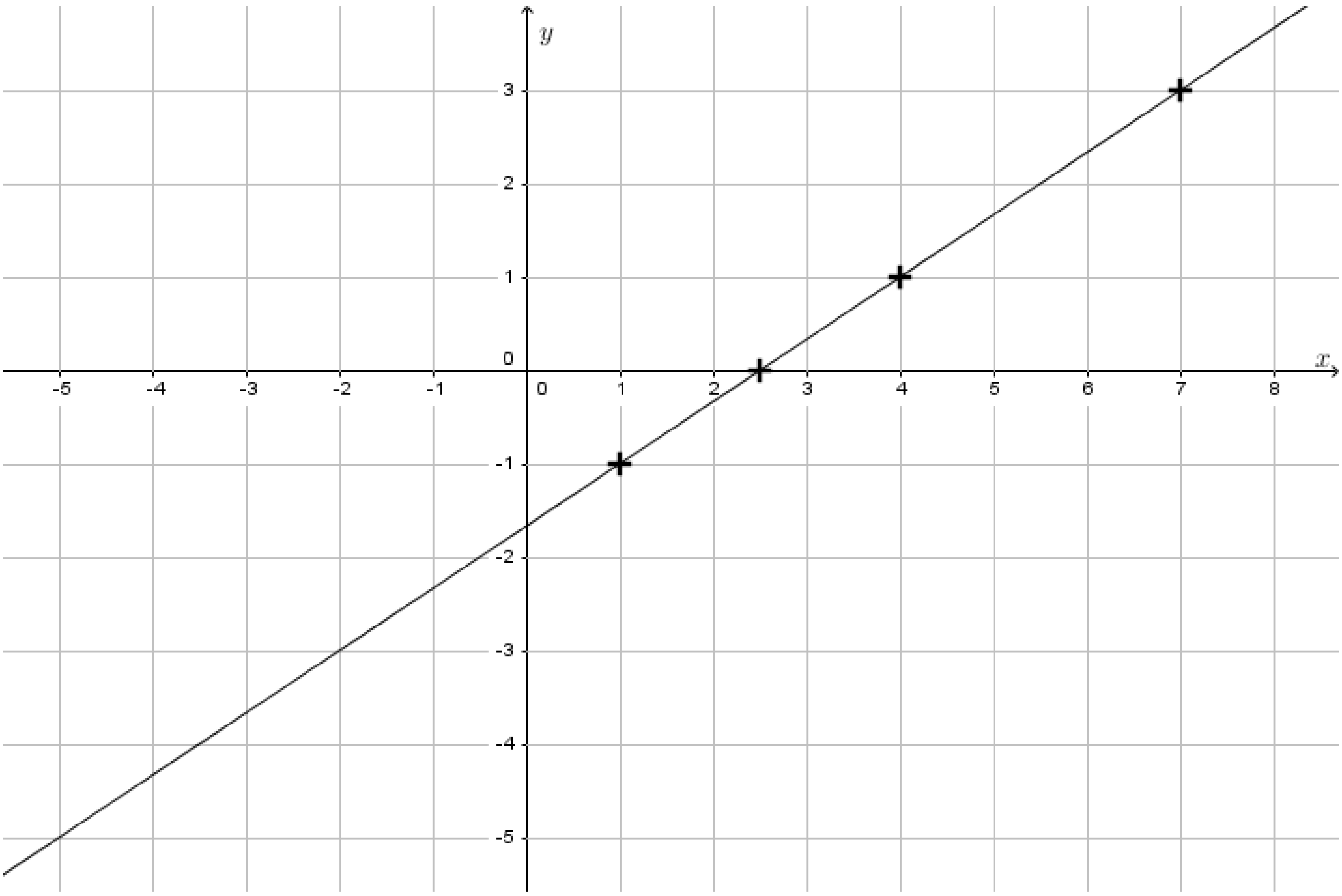
avec a, b, c nombres réels, et x, y inconnues.

Un exemple : considérons l'équation :

$$2x - 3y = 5$$

Une telle équation admet plusieurs solutions, que l'on donne sous la forme d'un couple solutions. Par exemple, ici nous avons $(1\ ;\ -1)$ qui est une solution. Ainsi que $(4; 1)$, ou $(7; 3)$ ou $(-2; -3)$ ou encore $(2{,}5\ ;\ 0)$…

Plaçons tous ces points dans un repère $(O\ ;I\ ;J)$:



Observations :

- Tous les points qui représentent un couple solution sont alignés.
- Si on prolonge la droite, alors tout point de la droite a ses coordonnées qui vérifient l'équation.
- Les points qui ne sont pas sur la droite ont leurs coordonnées qui ne vérifient pas l'équation.

On admet que :
L'équation $2x - 3y = 5$ admet une infinité de solutions. Dans un repère, cet ensemble de solutions forme une droite.

2°) Equation de droite.

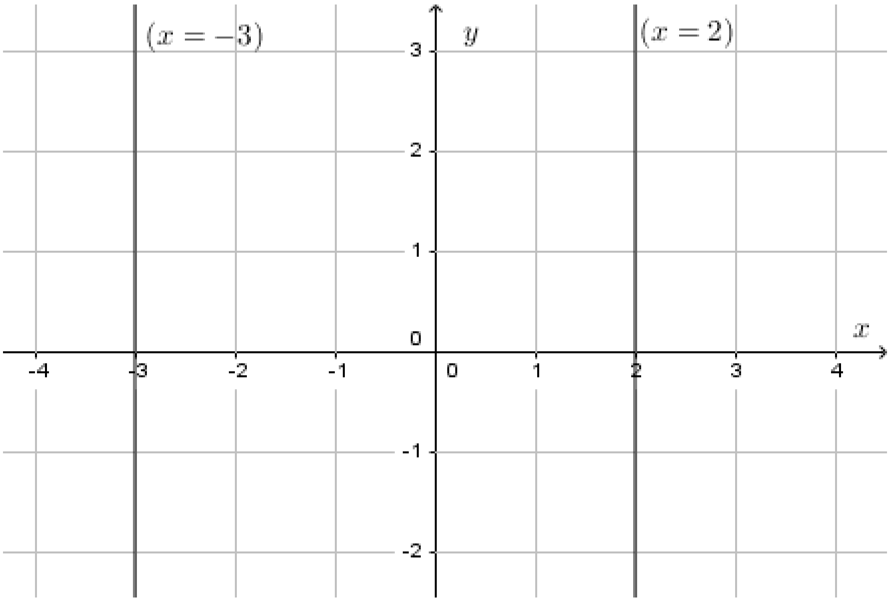
Toute droite d du plan muni d'un repère admet une équation de la forme

$$ax + by = c.$$

On dit que $ax + by = c$ est **l'équation cartésienne** de la droite d.

Cas particuliers :
Si $b = 0$ et $a \neq 0$, on obtient une équation de la forme $ax = c$ que l'on écrit plus traditionnellement $x = k$: c'est une droite verticale, parallèle à l'axe des ordonnées

Exemples :



Cas général :
Si $b \neq 0$ alors je peux écrire $ax + by = c \Leftrightarrow by = -ax + c$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$\Leftrightarrow y = mx + p$$

On dit que $y = mx + p$ est **l'équation réduite** de la droite d. Dans cette écriture, m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.

Exemple : pour chacune des droites dont voici une équation cartésienne, donner l'équation réduite.

a) $5x + 4y = 1$ Réponse : $y = -\frac{5x}{4} + \frac{1}{4}$
b) $-x + y = 4$ Réponse : $y = x + 4$
c) $2x - 2y = 3$ Réponse : $y = x - \frac{3}{2}$

Pour chacune des équations réduites données ci-dessous, trouver une équation cartésienne.

a) $y = \frac{2}{3}x + 4$ Réponse : $-2x + 3y = 12$
b) $y = -2x + 3$ Réponse : $2x + y = 3$
c) $y = -x - 5$ Réponse : $x + y = -5$

Remarque : l'équation réduite d'une droite est unique, tandis que plusieurs équations cartésiennes peuvent représenter la même droite.

Rappel : pour calculer l'équation réduite d'une droite non verticale, on commence par calculer le coefficient directeur m à l'aide de la formule suivante :

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite d d'équation réduite $y = mx + p$, alors :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

On calcule ensuite l'ordonnée à l'origine en utilisant l'équation de droite avec soit le point A, soit le point B.

Exemple : dans un repère $(O; I; J)$, voici les coordonnées de trois points $A\,(2; 5)$ $\quad B(-2; -3)$ $\quad C(-2; 5)$.

Déterminer une équation de chacune des droites $(AB), (AC), (BC)$.

Réponses :

(AB): la droite (AB) a pour équation $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-5}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2$ donc on a $y = 2x + p$, comme $A \in (AB)$ on a $y_A = 2x_A + p$ donc $5 = 2\times 2 + p$ d'où $p = 1$. L'équation de la droite (AB) est $y = 2x + 1$.

(AC) : Les points A et C ont la même ordonnée 5 donc la droite (AC) est la droite horizontale d'équation $y = 5$.

(BC) : Les points B et C ont la même abscisse -2 donc la droite (BC) est la droite verticale d'équation $x = -2$.

3°) Parallèles ou sécantes.

Toute droite dont l'équation est de la forme $x = k$ est une droite verticale, parallèle à l'axe des ordonnées.
Toute droite dont l'équation est de la forme $y = k$ est une droite horizontale, parallèle à l'axe des abscisses.

Soient d une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et d' une droite d'équation réduite $y = m'x + p'$.

$$d \text{ est parallèle à } d' \quad \text{si et seulement si} \quad m = m'$$

Applications : page 269

Si deux droites ne sont pas parallèles alors elles sont sécantes.
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection entre les deux droites d et d' on résout le système formé par les deux équations de droite.

Exemple :
On considère les droites $a : y = 2x - 5$; $\quad b : y = \frac{1}{2}x + 1$; $\quad c : y = 0{,}5x - 1$
Justifier que les droites b et c sont parallèles.
Justifier que les droites a et b, puis que les droites a et c, sont sécantes, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Réponses : après calcul on trouve que le point d'intersection entre les droites a et b est $(\,4\,;\ 3\,)$ et le point d'intersection entre a et c est $\left(\frac{8}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$. Les droites b et c sont parallèles car elles ont même coefficient directeur.

Applications : page 271

4°) Alignement de points.

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut :

- Les points pourraient être alignés verticalement ou horizontalement : on vérifie s'ils ont la même abscisse ou la même ordonnée.

- Avec deux points, on calcule l'équation de la droite. On vérifie ensuite si le troisième point appartient à la droite (par calcul).

- On forme deux droites d_1 et d_2 en choisissant deux fois 2 points, et on calcule les deux coefficients directeurs m_1 et m_2. Si $m_1 = m_2$, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles, or comme elles ont un point en commun, elles sont donc confondues, et les trois points sont alignés.

Exemple : dans un repère $(O; I; J)$, les points $A(-5; 2)$; $B(-1; -1)$ et $C(7; -7)$ sont-ils alignés ?

On observe que les points ont trois abscisses et trois ordonnées différentes, donc s'ils sont alignés, ce n'est ni horizontalement, ni verticalement. Voici deux stratégies différentes pour répondre à la question :

Je calcule l'équation de la droite (AB) et je vérifie par calcul si le point C est bien sur la droite (AB).

$(AB) : y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$
Donc on a $y = -\frac{3}{4}x + p$, comme $B \in (AB)$ on a
$y_A = -\frac{3}{4}x_A + p$ donc $-1 = -\frac{3}{4}\times(-1) + p$
d'où $p = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$.
L'équation de la droite (AB) est $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

Vérifions si C appartient à la droite :

$$-\frac{3}{4}x_C - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}\times 7 - \frac{7}{4} = -\frac{28}{4} = -7 = y_C$$

Les points A, B, C sont alignés.

Je calcule le coefficient directeur m_1 de la droite (AB) et le coefficient directeur m_2 de la droite (BC) puis je les compare.

$$(AB) : \ m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-1+5} = \frac{-3}{4}$$

$$(BC) : \ m_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-7+1}{7+1} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

Les coefficients directeurs sont égaux, on en déduit que les droites (AB) et (BC) sont parallèles.
De plus, elles ont le point B en commun.
Donc elles sont confondues, et les points A, B, C sont alignés.

Applications : page 281