FONCTIONS DE REFERENCE

1°) Fonctions du premier degré.

$a > 0$ fonction croissante
$a < 0$ fonction décroissante
Informations sur la pente (sens et vitesse de croissance)

ordonnée du point d'intersection entre la droite représentant f et l'axe des ordonnées

a : coefficient directeur

b : ordonnée à l'origine

$f : x \longmapsto ax + b$
Fonctions affines
Représentation graphique : droite non verticale

Cas particulier :
$a = 0, b \neq 0$
$f(x) = ax$
Fonction linéaire
Droite non verticale qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité

Cas particulier :
$a \neq 0, b = 0$
$f(x) = b$
Fonction constante
Droite horizontale

Cas particulier :
$a = b = 0$
$f(x) = 0$
Fonction nulle
Axe des abscisses

Ce qu'il faut savoir faire :

- Reconnaître une fonction affine algébriquement ou graphiquement
- Tracer la représentation graphique d'une fonction affine
- Construire le tableau des variations d'une fonction affine
- Construire le tableau de signes d'une fonction affine
- Expliciter la forme algébrique d'une fonction affine à partir de deux points ou à partir de sa représentation graphique

2°) Les fonctions du deuxième degré.

a. Etude de la fonction carré.

$f : x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

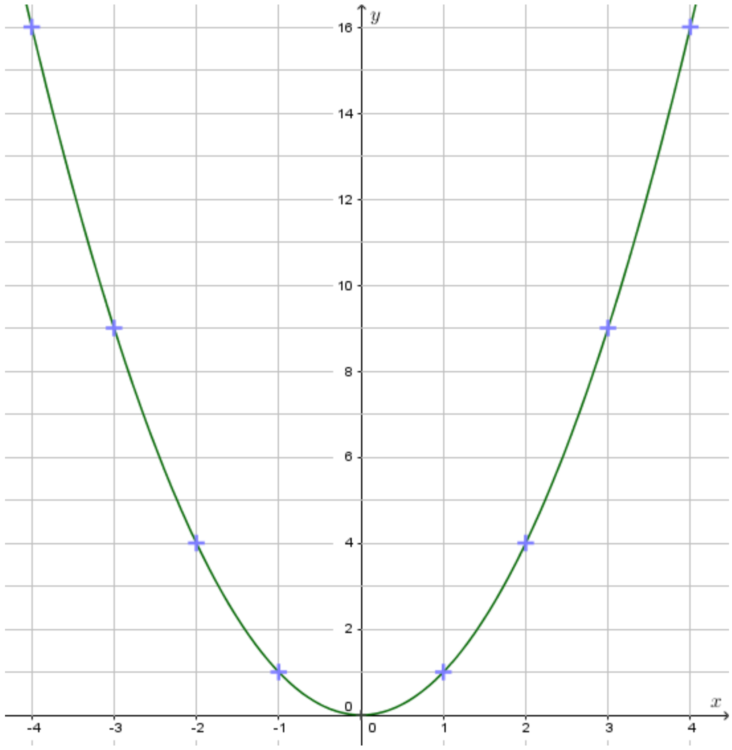


Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Tableau des variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

La représentation graphique de la fonction carré s'appelle une parabole.
Tournée vers le haut, on dit que la parabole est « convexe ».
La parabole admet un axe de symétrie vertical : l'axe des ordonnées.
Le point où les variations changent s'appelle le sommet de la parabole, il s'agit de l'origine du repère.

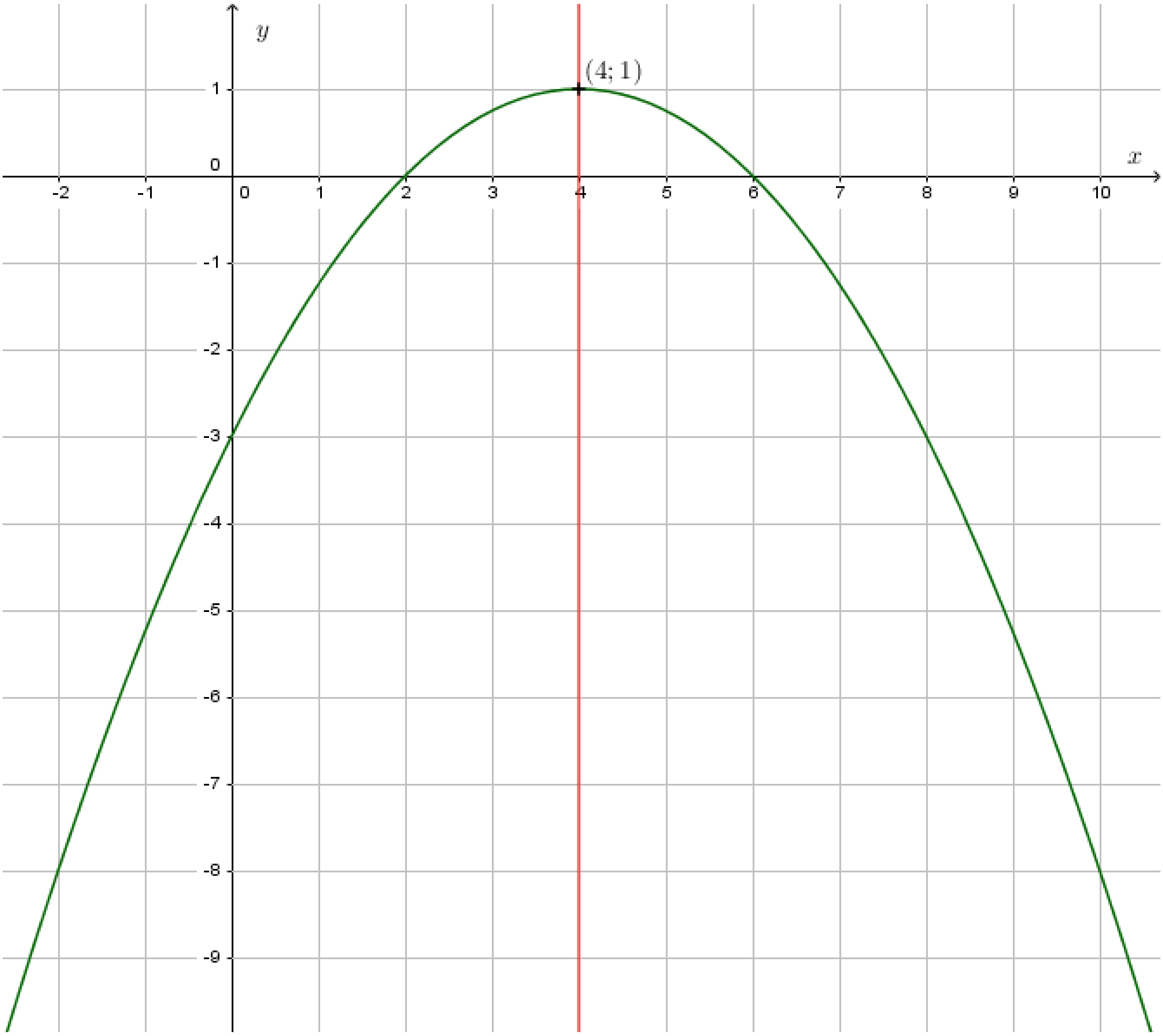
b. Les fonctions du second degré.

Etude d'un exemple : considérons la fonction suivante : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$ (forme canonique)

Montrons par calcul que $f(x)$ s'écrit aussi : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)(x-6)$ (forme factorisée)

En développant on obtient $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3$ (forme développée)

Représentation graphique :



Observations :

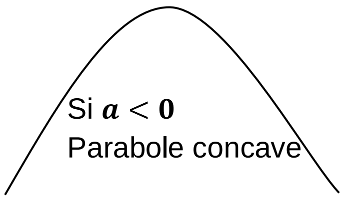
- La parabole est tournée vers le bas : on dit qu'elle est concave.
- L'axe de symétrie a pour équation : $x = 4$, c'est l'abscisse du sommet
- Le sommet a pour coordonnées : $(4\ ;\ 1)$, on retrouve ces coordonnées dans la forme canonique
- Les zéros de la fonction sont 2 et 6, on les retrouve dans la forme factorisée
- L'ordonnée à l'origine est -3, on la retrouve dans la forme développée
- f est croissante sur $]-\infty; 4[$ et f est décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$

Généralisations : les fonctions du second degré.

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $a \neq 0\,;\, a, b, c \in \mathbb{R}$ **forme développée** c : ordonnée à l'origine	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ $a \neq 0\ ;\ a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **forme canonique** $(\alpha;\beta)$: coordonnées du sommet

Représentation graphique : PARABOLE

Axe de symétrie : droite verticale qui passe par le sommet (par le point d'abscisse α).



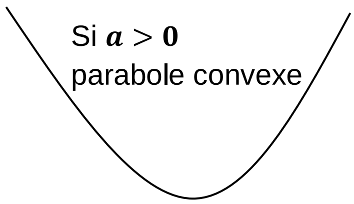


Tableau des variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

Tableau des variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

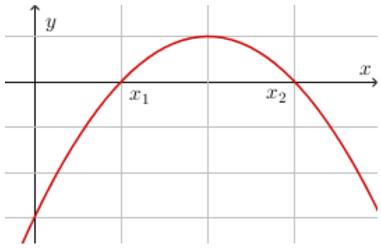
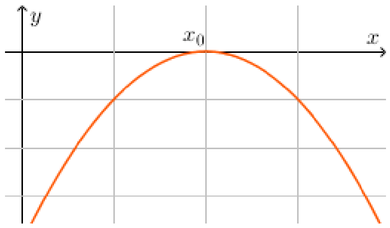
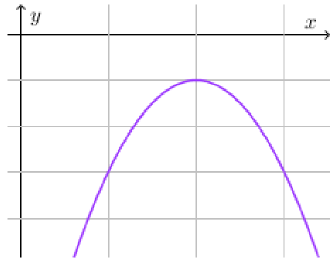
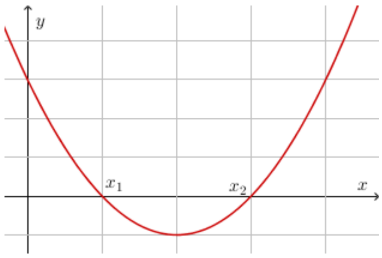
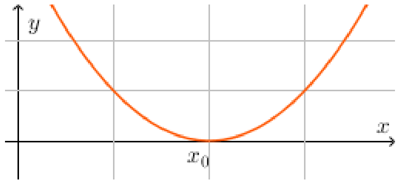
Propriété de symétrie : $f(\alpha - h) = f(\alpha + h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Conséquence : si je connais deux réels x_1 et x_2 qui ont la même image, alors l'abscisse du sommet vérifie :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Il faut également être capable de reconnaître la forme factorisée d'une fonction du second degré.

Il existe trois cas différents pour la **forme factorisée**, et ces cas dépendent du nombre de points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses (nombre de racines de la fonction).

	Deux points d'intersection : x_1 et x_2	Un seul point d'intersection : x_0	Pas d'intersection
$a < 0$ Parabole concave			
$a > 0$ Parabole convexe			

$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$	$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$ Cette forme factorisée correspond à la forme canonique avec $\alpha = x_0$ et $\beta = 0$	La forme factorisée n'existe pas

$a < 0$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

$a > 0$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

3°) Les fonctions homographiques.

a) La fonction inverse.

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel x non nul, fait correspondre son inverse.
La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \ =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
La fonction inverse se note $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de valeurs :

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Représentation graphique :

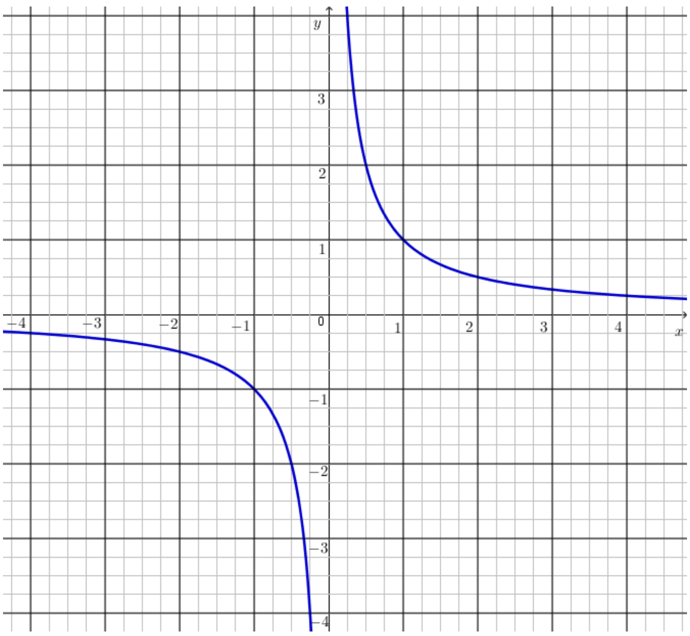


Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.
L'hyperbole est composée de deux « morceaux » de courbe représentative.
Elle admet un centre de symétrie (l'origine du repère) et deux axes de symétrie.
Elle admet deux **asymptotes** (*droite dont la courbe représentative va s'approcher de plus en plus, sans jamais ni la toucher ni la traverser*) :

- Une asymptote horizontale (l'axe des abscisses)
- Une asymptote verticale (l'axe des ordonnées)

b) Foncions homographiques.

On appelle fonction homographique toute fonction de la forme suivante :

$$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $c \neq 0$; $ad \neq bc$

La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.
L'ensemble de définition est l'ensemble de tous les réels qui n'annulent pas le dénominateur :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \left]-\infty \,;\, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c} \,;\, +\infty\right[$$

Ce qu'on doit savoir faire sur une fonction homographique :

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction homographique
- Transformer l'écriture d'une fonction homographique (de $e + \frac{f}{cx+d}$ à $\frac{ax+b}{cx+d}$)
- Etudier les variations d'une fonction homographique écrite sous la forme $a + \frac{b}{cx+d}$ sur les deux intervalles de son ensemble de définition.
- Construire un tableau de signes