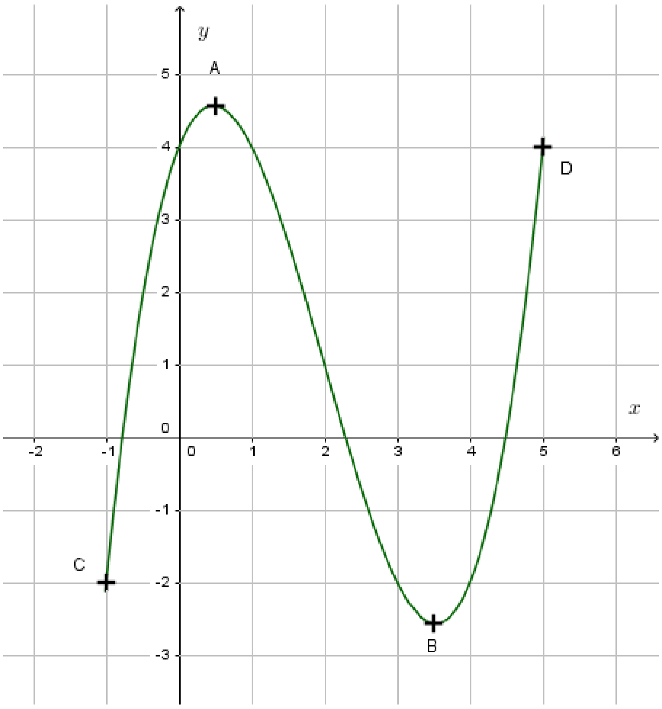
ETUDE QUALITATIVE DES FONCTIONS

1°) Variations d'une fonction.

a. Etude graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont voici une représentation :



Les points suivants appartiennent à la courbe représentative de la fonction :

$A(0{,}5\,;4{,}5)$; $B(3{,}5\,;\,-2{,}5)$

$C(-1\,;\,-2)$; $D(5\,;4)$

L'ensemble de définition de la fonction est l'intervalle de valeurs sur lesquelles la fonction existe ; c'est-à-dire, où la fonction commence et où elle termine.
On lit l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses.

On parle aussi du domaine de définition de f.

Ici, l'ensemble de définition de f est : $Dom_f = [-1\,;5]$.

Sur l'axe des abscisses représente l'ensemble « de départ », l'axe des ordonnées on trouve l'ensemble « d'arrivée », aussi appelé ensemble image de f. Ici, il est égal à : $Im_f = [2{,}5\ ;\ 4{,}5]$.

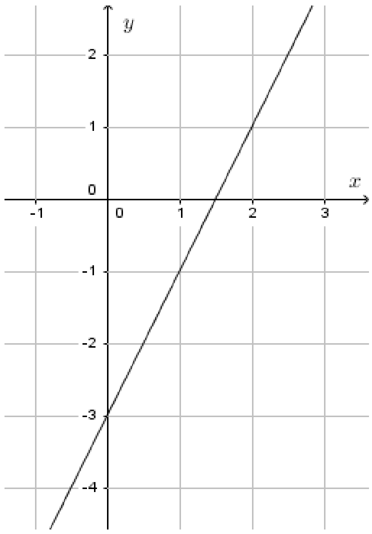
Description des variations et extrema : la fonction f :

est strictement croissante sur $[-1\,;0{,}5[$
admet comme maximum $4{,}5$ pour $x = 0{,}5$
est strictement décroissante sur $]0{,}5\,;3{,}5[$
admet comme minimum $-2{,}5$ pour $x = 3{,}5$
est strictement croissante sur $]3{,}5\,;5]$

Toutes ces informations peuvent être résumées dans un tableau, que l'on appelle tableau des variations de la fonction f :

x	-1		$0{,}5$		$3{,}5$		5
Variations de f		↗	$4{,}5$	↘		↗	4
	-2				$-2{,}5$		

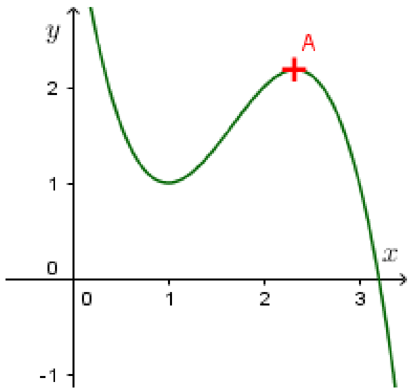
Un exemple : on considère la fonction affine g définie par : $g(x) = 2x - 3$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (c'est le cas pour toutes les fonctions affines).
Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car le coefficient directeur 2 est positif).



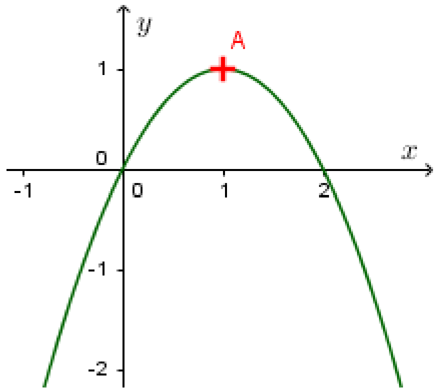
x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de f		↗	

On différenciera la notion *d'extremum relatif* de la notion *d'extremum absolu*.

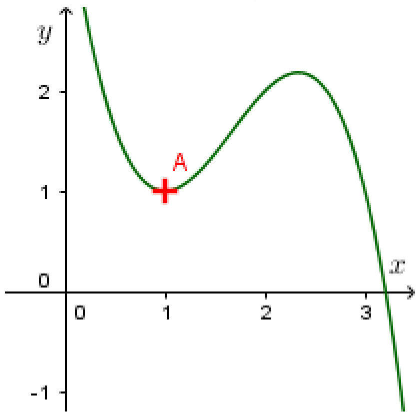
Maximum relatif



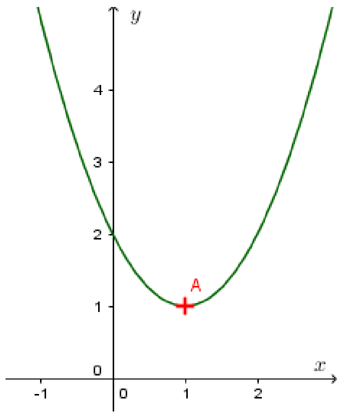
Maximum absolu



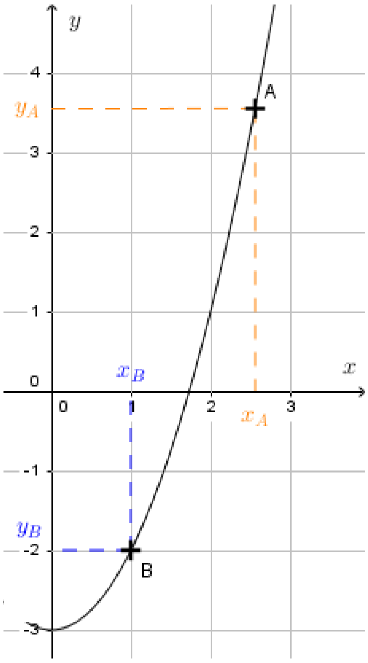
Minimum relatif



Minimum absolu



b. Influences des variations sur l'ordre des réels.

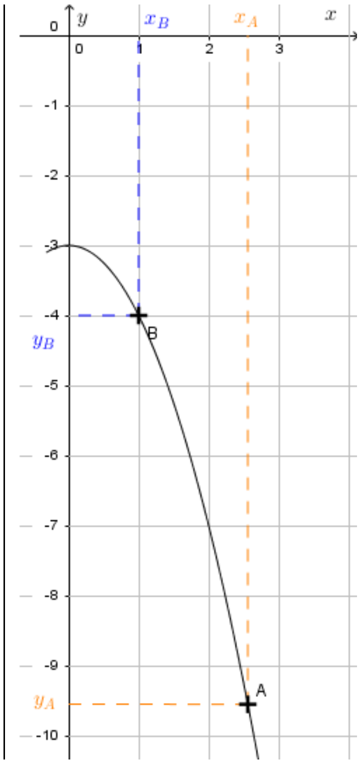


Lorsque la fonction
est croissante
sur un intervalle,
l'ordre des réels
est conservé
sur cet intervalle.

$x_B < x_A$

et

$f(x_B) < f(x_A)$



Lorsque la fonction
est décroissante
sur un intervalle,
l'ordre des réels
est inversé
sur cet intervalle.

$x_B < x_A$

et

$f(x_B) > f(x_A)$

c. Etude algébrique

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit J un sous-intervalle de I. Soient $a, b \in J$.

Si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur J.

Si $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ alors f est croissante sur J.

Si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ alors f est strictement décroissante sur J.

Si $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur J.

Il faut retenir :

- **Multiplier ou diviser par un nombre négatif** inverse l'ordre des nombres ($2 < 5$ mais $-5 < -2$).
- **Inverser** inverse l'ordre des nombres ($2 < 5$ mais $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$).

Exemple 1 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$,
étudier le sens de variations de la fonction sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$.

Soient a, b deux nombres de $]0\,;\,+\infty[$. Alors :

$$a < b$$

$$\Rightarrow a^2 < b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 < b^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b)$$

On a démontré algébriquement que f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exemple 2 :

On considère la fonction $g : x \longmapsto \frac{3}{x+1}$.
Etudier le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$.

Soient a, b deux nombres de $]-\infty\,;\,-1[$. Alors :

$$a < b$$

$$\Rightarrow a + 1 < b + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a+1} > \frac{3}{b+1}$$

$$\Rightarrow g(a) > g(b)$$

On a démontré algébriquement que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$.

2°) Etude du signe d'une fonction.

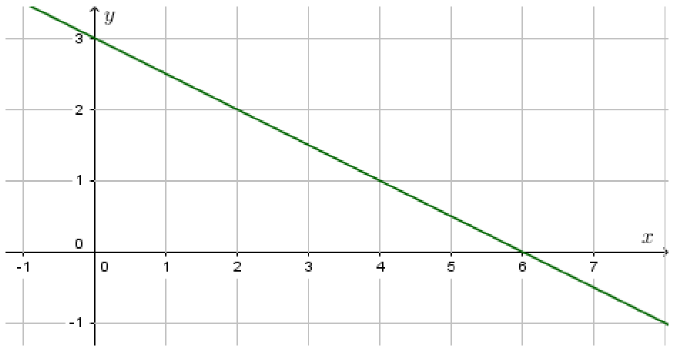
a. Etude graphique.

Graphiquement, une fonction est dite positive sur les intervalles où sa courbe représentative est au-dessus de l'axe des abscisses, elle est dite négative sur les intervalles où sa courbe représentative est en dessous de l'axe des abscisses, et enfin elle s'annule aux endroits où elle touche l'axe des abscisses.

On peut construire des tableaux de signes pour décrire le signe d'une fonction sur son ensemble de définition.

Exemples :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

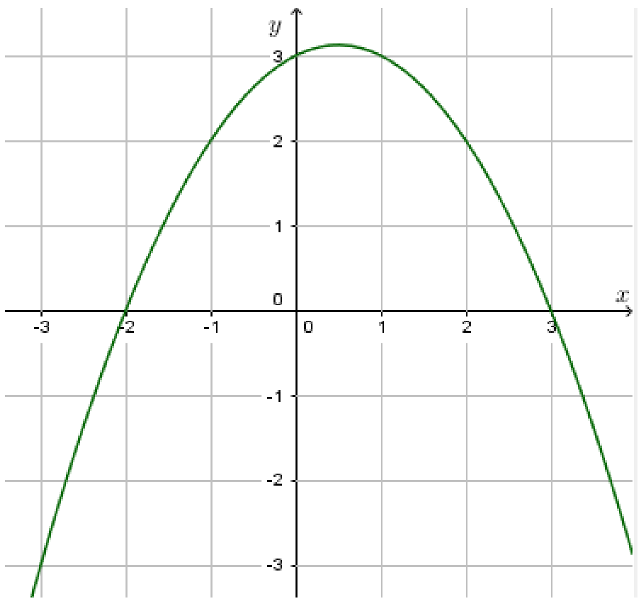


$f(x) > 0$ sur $]-\infty\,; 6[$.
La fonction s'annule au point d'abscisse 6.
$f(x) < 0$ sur $]6\,;\, +\infty[$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$$g(x) = -(x+2)(x-3)$$



$g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\, -2[$.
$g(x) = 0$ pour $x = -2$.
$g(x) > 0$ sur $]-2\,; 3[$.
$g(x) = 0$ pour $x = 3$.
$g(x) < 0$ sur $]3\,;\, +\infty[$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Etude algébrique.

Pour étudier algébriquement le signe d'une fonction, il faut connaître la forme factorisée de la fonction.
On calculera d'abord les antécédents de 0 par la fonction, c'est-à-dire les points d'intersection de la courbe représentative avec l'axe des abscisses, aussi parfois appelés les zéros de la fonction.

Dans la construction du tableau de signes, on utilisera une ligne par facteur.
Pour trouver le signe d'un intervalle, on calcule mentalement l'image d'un nombre de cet intervalle.
Pour trouver le signe du produit final, on applique la règle du signe d'un produit.

Exemples :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$$g(x) = -(x+2)(x-3)$$

$$-(x+2)(x-3) = 0 \quad \text{équation produit nul}$$

$x = -2$ ou $x = 3$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3°) Inéquations de degré supérieur ou égal à 2.

Pour résoudre une telle inéquation, on factorise et on utilise un tableau de signe.

Exemple : résoudre $-(x+2)(x-3) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $-(x+2)(x-3) \leq 0$ sur $]-\infty\,;\,-2] \cup [3\,;\,+\infty[$.