CONFIGURATIONS DU PLAN

1°) Longueur d'un segment.

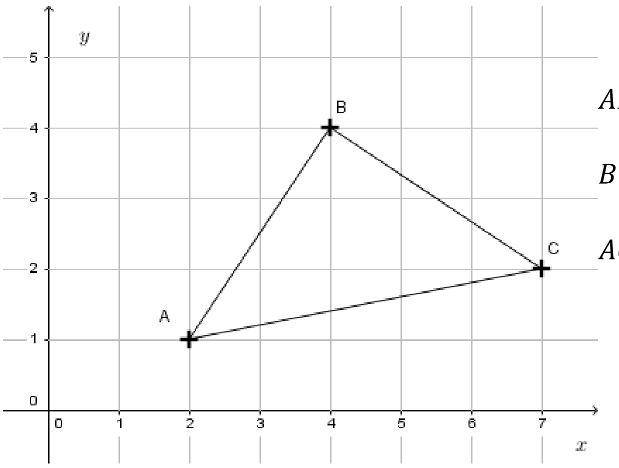
Soit (O, I, J) un repère orthonormé et soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

Alors on a :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemple d'utilisation :

On donne $A\ (2\ ;1)$; $B\ (4\ ;4)$ et $C\ (7;2)$: représenter graphiquement la situation, émettre une conjecture sur la nature du triangle ABC puis démontrer cette conjecture.



Le triangle ABC semble isocèle et rectangle en B.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

J'ai $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

De plus, AB=BC donc le triangle ABC est bien rectangle et isocèle en B.

2°) Milieu d'un segment.

Soit (O, I, J) un repère orthonormé et soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

Alors on a équivalence entre :

$I(x_I ; y_I)$ est le milieu de $[AB]$ et $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$; $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$

Exemples d'utilisation : dans chaque cas, I est le milieu du segment $[AB]$. Calculer les coordonnées du point manquant.

a) $A(5\,;9)$ et $B(10;7)$
b) $A(-2\,;4)$ et $I(6\,;\,-5)$

Solution :

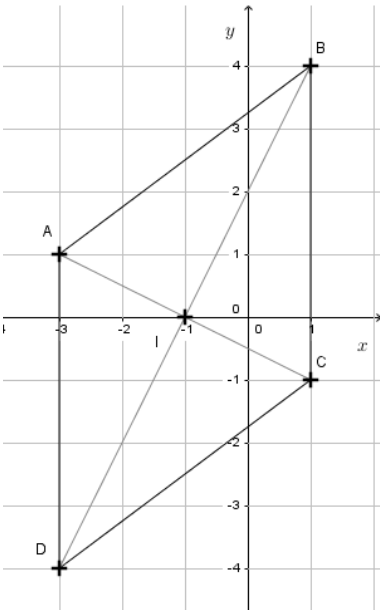
a) I est le milieu de $[AB]$
donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5+10}{2} = 7{,}5$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{9+7}{2} = 8$; d'où $I(7{,}5; 8)$.

b) I est le milieu de $[AB]$ donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ d'où $x_B = 2x_I - x_A = 2\times 6 + 2 = 14$
et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$ d'où $y_B = 2y_I - y_A = -10 - 4 = -14$; donc $B(14\,;\,-14)$.

3°) Exemple d'étude de configuration du plan.

Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

On donne les quatre points $A\,(-3;1), B(1;4), C(1;-1), D(-3;-4)$: représenter la situation, conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$ puis démontrer la conjecture.



Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme :
On sait que : $A\,(-3;1), B(1;4), C(1;-1), D(-3;-4)$.
Propriété : si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Soit $I(x_I;y_I)$ le milieu de $[AC]$, alors $x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$;
et $y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ donc $I(-1\,;0)$.
Soit $J(x_J;y_J)$ le milieu de $[BD]$, alors $x_J = \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$;
et $y_J = \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$ donc $J(-1\,;0)$.
Conclusion : les points I et J sont confondus, les diagonales du quadrilatère ont le même milieu, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Montrons que $ABCD$ est un losange :
On sait que : $ABCD$ est un parallélogramme et $A\,(-3;1),\ B(1;4),$
$C(1;-1),\ D(-3;-4)$.
Propriété : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même mesure, alors c'est un losange.

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$AB = \sqrt{\left(1-(-3)\right)^2+(4-1)^2}$
$AB = \sqrt{16+9}$
$AB = 5$

$AD = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}$
$AD = \sqrt{\left(-3-(-3)\right)^2+(-4-1)^2}$
$AD = \sqrt{0+25}$
$AD = 5$

On a : $AB = AD = 5$
Conclusion : le parallélogramme ABCD est un losange.