OUTILS POUR L'ANALYSE

1°) Expressions algébriques.

a. Développer une expression polynomiale.

Une expression polynomiale à une inconnue x est une expression qui peut s'exprimer sous la forme d'une somme de termes composés par un coefficient numérique réel qui multiplie une puissance de x.

$\frac{8}{7}x^5 - 4x^4 + 3x - 7$ est une expression polynomiale.

Développer une expression polynomiale, c'est transformer un produit en somme ou différence. En classe de 2nde, on connaît déjà plusieurs méthodes de développement.

- Application de la règle de suppression des parenthèses :

$A = 4x^2 - 5 - (2x^2 - 3x + 7)$

$A = 4x^2 - 5 - 2x^2 + 3x - 7$

$A = 4x^2 - 2x^2 + 3x - 5 - 7$

$A = 2x^2 + x - 12$

- Développements de la forme $k(a + b)$:

$B = 4x^2 - 5 + 3(2x^2 - 3x + 7)$

$B = 4x^2 - 5 + 6x^2 - 9x + 21$

$B = 4x^2 + 6x^2 - 9x + 21 - 5$

$B = 10x^2 - 9x + 16$

$C = 4x^2 - 5 - 3(2x^2 - 3x + 7)$

$C = 4x^2 - 5 - 6x^2 + 9x - 21$

$C = 4x^2 - 6x^2 + 9x - 21 - 5$

$C = -2x^2 + 9x - 26$

- Développements de la forme $(a+b)(c+d)$

$D = 4x^2 - 5 + (2x + 3)(x - 1)$

$D = 4x^2 - 5 + 2x^2 - 2x + 3x - 3$
$D = 4x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 - 5$
$D = 6x^2 + x - 8$

$E = 4x^2 - 5 - (3x - 5)(x - 1)$

$E = 4x^2 - 5 - (3x^2 - 3x - 5x + 5)$
$E = 4x^2 - 5 - (3x^2 - 8x + 5)$
$E = 4x^2 - 5 - 3x^2 + 8x - 5$
$E = 4x^2 - 3x^2 + 8x - 5 - 5$
$E = x^2 + 8x - 10$

$F = -2x^2 + 8 + 3(x + 2)(-x - 5)$
$F = -2x^2 + 8 + (3x + 6)(-x - 5)$
$F = -2x^2 + 8 - 3x^2 - 15x - 6x - 30$
$F = -2x^2 - 3x^2 - 15x - 6x + 8 - 30$
$F = -5x^2 - 21x - 22$

$G = -2x^2 + 8 - 3(x + 2)(-x - 5)$
$G = -2x^2 + 8 + (-3x - 6)(-x - 5)$
$G = -2x^2 + 8 + 3x^2 + 15x + 6x + 30$
$G = -2x^2 + 3x^2 + 15x + 6x + 30 + 8$
$G = x^2 + 21x + 38$

- Développements par une identité remarquable :

Rappel :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$H = 8\left(3x + \frac{1}{2}\right)^2 - 5(3x + 4)(3x - 4)$
$H = 8\left(9x^2 + 3x + \frac{1}{4}\right) - 5(9x^2 - 16)$
$H = 72x^2 + 24x + 2 - 45x^2 + 80$
$H = 72x^2 - 45x^2 + 24x + 2 + 80$
$H = 27x^2 + 24x + 82$

b. Factoriser une expression polynomiale.

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

- Mise en évidence d'un facteur commun :

$A = (3x-2)(2x+5) + 5(3x-2)^2$
$A = (3x-2)(2x+5) + 5(3x-2)(3x-2)$
$A = (3x-2)[(2x+5) + 5(3x-2)]$
$A = (3x-2)(2x+5+15x-10)$
$A = (3x-2)(17x-5)$

$B = (2x+3)(3x-4) - 2(x-5)(3x-4)$
$B = (3x-4)[(2x+3) - 2(x-5)]$
$B = (3x-4)(2x+3-2x+10)$
$B = (3x-4) \times 13$
$B = 13(3x-4)$

- Utilisation des identités remarquables :

Rappel :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$C = \frac{4}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + 9$

$C = \left(\frac{2x}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{2x}{5} \times 3 + 3^2$

$C = \left(\frac{2x}{5} - 3\right)^2$

$D = x + 0{,}25 + x^2$

$D = 0{,}25 + x + x^2$

$D = (0{,}5)^2 + 2 \times 0{,}5 \times x + x^2$

$D = (0{,}5 + x)^2$

$E = -0{,}01 + 4x^2$

$E = 4x^2 - 0{,}01$

$E = (2x)^2 - (0{,}1)^2$

$E = (2x - 0{,}1)(2x + 0{,}1)$

- Factorisations successives :

$F = 4x^2 - 9 + (2x+3)$

$F = (2x-3)(2x+3) + (2x+3) \times 1$

$F = (2x+3)(2x-3+1)$

$F = (2x+3)(2x-2)$

$F = 2(2x+3)(x-1)$

- Factorisations par -1 :

$G = (x+4)(2x-5) + (3x-1)(-2x+5)$

$G = (x+4)(2x-5) - (3x-1)(2x-5)$

$G = (2x-5)[(x+4) - (3x-1)]$

$G = (2x-5)(x+4-3x+1)$

$G = (2x-5)(-2x+5)$

$G = -(2x-5)(2x-5)$

$G = -(2x-5)^2$

c. Transformer des expressions rationnelles.

Une expression rationnelle est une expression de la forme $\frac{a(x)}{b(x)}$, où $a(x)$ et $b(x)$ sont des expressions polynomiale.

On peut utiliser la factorisation et le développement pour modifier l'écriture d'une expression rationnelle.

Exemples :

- Mettre au même dénominateur

$H = 2 - \frac{5}{3x+2}$

$H = 2 \times \frac{3x+2}{3x+2} - \frac{5}{3x+2}$

$H = \frac{6x+4}{3x+2} - \frac{5}{3x+2}$

$H = \frac{6x+4-5}{3x+2}$

$H = \frac{6x-1}{3x+2}$

$I = \frac{3x}{x-5} + \frac{5}{2x+1}$

$I = \frac{3x}{x-5} \times \frac{2x+1}{2x+1} + \frac{5}{2x+1} \times \frac{x-5}{x-5}$

$I = \frac{3x(2x+1) + 5(x-5)}{(x-5)(2x+1)}$

$I = \frac{6x^2 + 3x + 5x - 25}{(x-5)(2x+1)}$

$I = \frac{6x^2 + 8x - 25}{(x-5)(2x+1)}$

- Chercher les valeurs interdites du dénominateur

$J = \frac{5}{x^2 - 4}$

$J = \frac{5}{(x-2)(x+2)}$

Valeurs interdites : $x \neq 2$ et $x \neq -2$

Une valeur interdite, c'est une valeur que l'on ne peut pas attribuer à x, car il en résulterait un dénominateur nul (égal à zéro)

- Simplifier une expression rationnelle après avoir cherché les valeurs interdites

$$K = \frac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 - 9}$$

$$K = \frac{(2x+3)^2}{(2x-3)(2x+3)} \quad \text{avec} \quad x \neq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

$$K = \frac{(2x+3)(2x+3)}{(2x-3)(2x+3)} \quad \text{avec} \quad x \neq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

$$K = \frac{2x+3}{2x-3} \quad \text{avec} \quad x \neq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

2°) Résolution d'équations.

a) Equations du premier degré à une inconnue

Méthode :

- Réduire les deux membres de l'équation
- Isoler le terme contenant l'inconnue

Application à la résolution de problèmes : *lire l'exercice résolu de la page 51* + *s'entraîner avec les exercices du 57 page 61.*

b) Equations produit nul

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple : résoudre dans ℝ les équations suivantes :

$$(2x+3)(x-7) = 0$$

$$2x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x-7 = 0$$

$$2x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 7$$

L'équation admet deux solutions dans ℝ :

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\,;7\right\}$$

$$2x(x-5)(x+3) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad x-5 = 0 \quad \text{ou} \quad x+3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'équation admet trois solutions dans ℝ :

$$S = \{-3\,;0\,;5\}$$

c) Equations se ramenant à une équation du premier degré à une inconnue

Utilisation de la factorisation : exemples, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$S = \{-3\,;3\}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$(2x-1)^2 = 0$$
$$2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

L'équation admet une solution dans $\mathbb{R}$:

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$9x^2 + 6x = -1$$
$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$
$$(3x+1)^2 = 0$$
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

L'équation admet une solution réelle :

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

d) Equations quotient nul

Propriété : $\frac{a(x)}{b(x)} = 0$ si et seulement si $\begin{cases} a(x) = 0 \\ b(x) \neq 0 \end{cases}$

Exemples :

$$\frac{5x+1}{2-5x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 1 = 0 \\ 2 - 5x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = -1 \\ -5x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

L'équation admet une unique solution : $S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

$$\frac{3}{x+2} = 5$$

$$\frac{3}{x+2} - 5 = 0$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{5(x+2)}{x+2} = 0$$

$$\frac{3 - 5x - 10}{x+2} = 0$$

$$\frac{-7 - 5x}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 - 5x = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{5} \\ x \neq -2 \end{cases}$$

L'équation admet une unique solution : $S = \left\{\frac{-7}{5}\right\}$

e) Equations en égalité de quotients

Propriété : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si $ad=bc$ et $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

Exemple :

$$\frac{4x-6}{x}=\frac{2x+1}{0{,}5x-2}$$

Valeurs interdites : $x\neq 0$ et $x\neq 4$

$$(4x-6)(0{,}5x-2)=x(2x+1) \qquad \text{avec} \quad x\neq 0, x\neq 4$$

$$2x^2-8x-3x+12=2x^2+x \qquad \text{avec} \quad x\neq 0, x\neq 4$$

$$2x^2-11x+12-2x^2-x=0 \qquad \text{avec} \quad x\neq 0, x\neq 4$$

$$-12x+12=0 \qquad \text{avec} \quad x\neq 0, x\neq 4$$

$$x=1 \qquad \text{avec} \quad x\neq 0, x\neq 4$$

L'équation de départ admet donc une unique solution : $x=1$.

f) Résolution d'un problème concret

Etapes :

- Analyse de la situation - Mise en équation
- Résolution de l'équation
- Vérification de l'équation
- Répondre au problème

Exemple détaillé : voir livre page 51 (exercice corrigé).

g) Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Remarques : un système d'équations est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, avec a, b, c, d, e, f nombres réels connus, et x, y les inconnues. Un couple de nombres $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution du système s'il vérifie les deux équations simultanément. Résoudre un système, c'est chercher toutes les solutions possibles.

Il peut y avoir soit un unique couple solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Méthode A : par substitution.

Exemple avec le système :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+4y=-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-4y-3)-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -12y-9-2y=5 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -14y=5+9 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -14y=14 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-4\times(-1)-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=4-3 \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Je vérifie mes solutions :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 & 3\times1-2\times(-1)=3+2=5 \quad VRAI \\ x+4y=-3 & 1+4\times(-1)=1-4=-3 \quad VRAI \end{cases}$$

Conclusion : le système admet une unique solution : $(1\ ;\ -1)$.

Méthode B : par combinaisons linéaires.

Exemple avec le système :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$$

Je vais faire disparaître l'inconnue x, et pour cela, je vais multiplier la deuxième équation par 2 afin de faire apparaître devant les x de chaque équation un coefficient opposé.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 & (\times 2) \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -4x+4y=-4 \end{cases}$$

J'effectue une addition « membre à membre »

$$0 + \ y=-2$$

La première inconnue est $y=-2$

Je reprends le système de départ :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$$

Pour faire apparaître deux coefficients opposés devant les y, je vais multiplier la première équation par 2 et la deuxième équation par 3.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 & (\times 2) \\ -2x+2y=-2 & (\times 3) \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=4 \\ -6x+6y=-6 \end{cases}$$

J'effectue une addition « membre à membre »

$$2x \quad =-2$$

donc $\quad x=-1$

La première inconnue est $x=-1$

Je vérifie mes solutions :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 & 4\times(-1)-3\times(-2)=-4+6=2 \quad VRAI \\ -2x+2y=-2 & -2\times(-1)+2\times(-2)=2-4=-2 \quad VRAI \end{cases}$$

Conclusion : le système admet une unique solution : $(-1\ ;\ -2)$.

Pour s'entraîner : exercices du livre page 271.

3°) Inéquations.

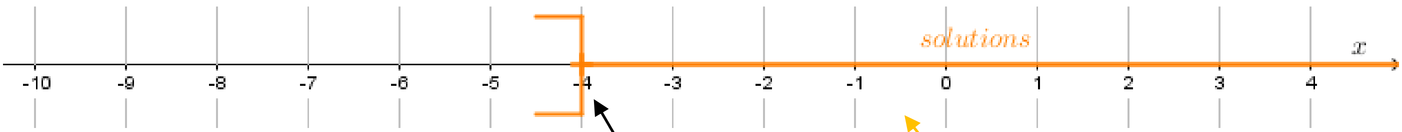
La résolution d'une inéquation suit les mêmes règles que la résolution d'une équation.

Seule différence : lorsque l'on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, alors le sens de l'inéquation change.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
3x(x-5) &< 3x^2 - 10x + 20 \\
3x^2 - 15x &< 3x^2 - 10x + 20 \\
-15x &< -10x + 20 \\
-15x + 10x &< 20 \\
-5x &< 20 \\
x &> -\frac{20}{5} \\
x &> -4
\end{aligned}
$$

Les solutions d'une inéquation peuvent être **représentées graphiquement** :



Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à -4

Les crochets sont vers l'extérieur car la borne -4 n'appartient pas aux solutions

-4 s'appelle une « borne » dans notre cas il n'appartient pas aux solutions

L'intervalle associé à cet ensemble de nombres est : $S =]-4\,;\,+\infty[$

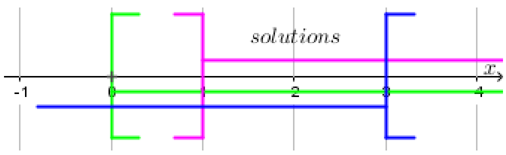
L'infini (car pas de borne supérieure) est TOUJOURS exclu de l'intervalle

Exercices 22 – 23 – 24 page 131 : donner les trois représentations des solutions.

On peut utiliser la représentation graphique pour résoudre un système d'inéquations :

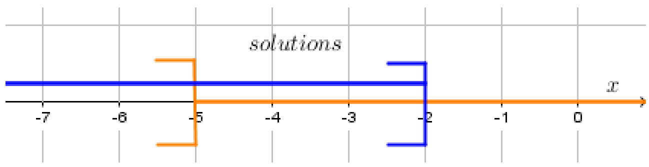
Exemples :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \\ x > 1 \end{cases}$$



Solutions : $S =]1\,;3[$

$$-5 < x \leq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \leq -2 \end{cases}$$



Solutions : $S =]-5\,;\,-2]$

Exercices d'application : voir 25 et 26 page 131

Vocabulaire :

Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$

On dit qu'un intervalle de la forme $]a\,;b[$ est un intervalle ouvert.

On dit qu'un intervalle de la forme $]a\,;b]$ ou $[a\,;b[$ est un intervalle semi-ouvert.

On dit qu'un intervalle de la forme $[a\,;b]$ est un intervalle fermé.

Dans chacun des cas ci-dessus, a et b sont les bornes des intervalles.

Cas particuliers :

L'intervalle $[a\,;a]$ représente l'ensemble constitué par le nombre a, on a $[a\,;a] = \{a\}$, on dit que c'est un singleton.

Un intervalle vide se note $\emptyset$ (lire : « ensemble vide »).

Un intervalle qui n'a aucune borne est $]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.

Réunion et intersection d'intervalles :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On note $I \cup J$ et on lit « I union J » l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ***ou*** à J, c'est-à-dire soit à I, soit à J,soit aux deux.

Exemples : $]-\infty; 2] \cup [-2; +\infty[=$

$]-5\,;4[\cup [5\,;6] =$

$[1\,;8] \cup]2\,;5[=$

On note $I \cap J$ et on lit « I inter J » l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ***et*** à J, c'est-à-dire qui sont simultanément dans I et dans J.

Exemples : $]-\infty; 2] \cap [-2; +\infty[=$

$]-5\,;4[\cap [5\,;6] =$

$[1\,;8] \cap]2\,;5[=$

Application : exercice 3 page 17

4°) Les fonctions.

Une fonction est un objet mathématique qui, à tout nombre x fait correspondre un unique nombre y.

On a : $y = f(x)$, alors : y est l'image de x par f ; x est l'antécédent de y par f.

Rappel : un antécédent ne peut avoir qu'une seule image, une image peut avoir plusieurs antécédents.

Exemple : on considère $f : x \longmapsto 2x^2 - 5$. Alors on peut :

- Calculer une image par f

Calculer l'image de -3 par f.

$f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 5$
$f(-3) = 2 \times 9 - 5$
$f(-3) = 18 - 5$
$f(-3) = 13$

L'image de -3 par f est 13.

- Calculer un antécédent par f

Calculer le(s) antécédent(s) de 11 par f.

Je cherche x tel que $f(x) = 11$

$$2x^2 - 5 = 11$$
$$2x^2 = 16$$
$$x^2 = 8$$
$$x^2 - 8 = 0$$
$$(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) = 0$$

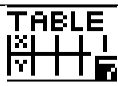
Le nombre 11 a deux antécédents par f : $-\sqrt{8}$ et $\sqrt{8}$.

- Construire un tableau de valeurs :

« à la main » :

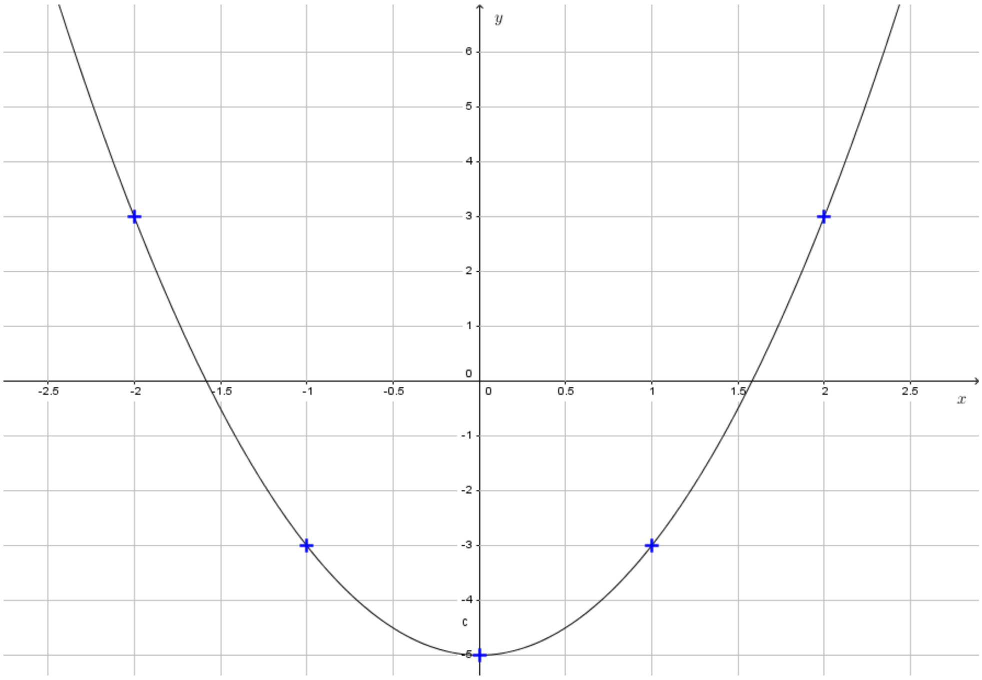
x	-2	-1	0	1	2	*Antécédents Abscisses*
$y = f(x)$	3	-3	-5	-3	3	*Images Ordonnées*

Sur la calculatrice :

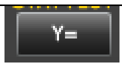
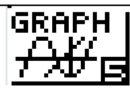
TI	CASIO
Cliquer sur  Ecrire l'expression de la fonction : Y1=2X^2−5 (le X se trouve là : ) Appuyer ensuite sur TblSet (réglages du tableau). Tblstart : mettre la valeur de départ ΔTbl : mettre le pas (= je veux une valeur tous les…) Valider en appuyant sur ENTER Appuyer sur TABLE	Cliquer sur  puis choisir  Editer Y1 = 2X^2−5 et valider par EXE (le X se trouve là : ) Appuyer sur F5 (« SET ») Start : mettre la première case souhaitée End : mettre la dernière case souhaitée Step : mettre le pas (=je veux une valeur tous les…) EXE Retour à l'écran précédent Appuyer sur F6 « TABL » Exit pour quitter le tableau.

- Représenter graphiquement la fonction f :

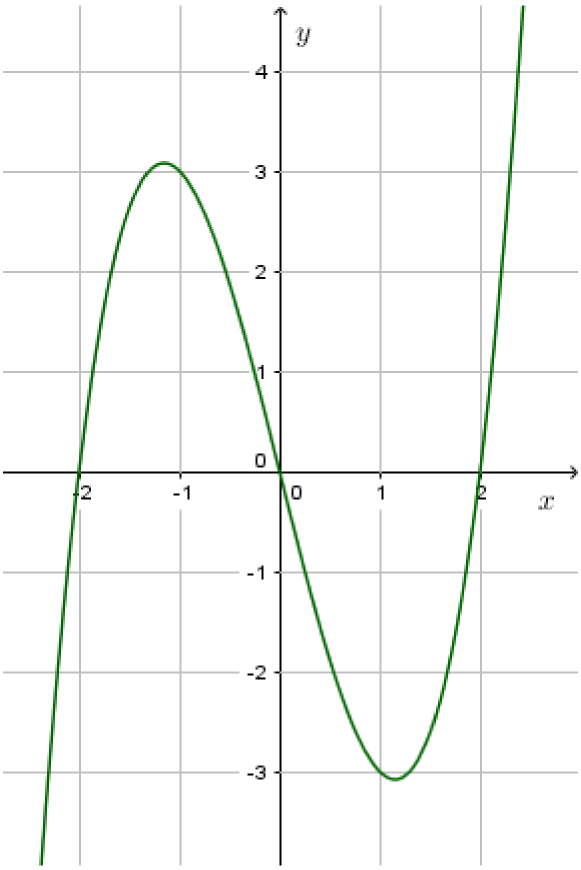
« à la main » :



Ou sur la calculatrice :

TI	CASIO
Cliquer sur  Ecrire l'expression de la fonction : Y1=2X^2–5 Cliquer sur GRAPH Pour améliorer les paramètres de la fenêtre : « ZOOM » puis essayer les différentes options	Cliquer sur  puis choisir  Editer Y1 = 2X^2–5 et valider par EXE Cliquer sur F6 (« Draw ») Pour améliorer les paramètres de la fenêtre : Shift – F3 (« View Window »), choisir XMIN=-2.5 XMAX=2.5 YMIN=-5 YMAX=6 Laisser inchangés les autres paramètres

- Lire graphiquement une image ou un antécédent :



Le graphique ci-dessus représente une fonction f.

On observe que :

- 0 a trois antécédents par f : $-2\,;0\,;2$
- L'image par f de 0 est : 0
- $f(-1) = 3$
- $f(\ 1) = -3$