Partie A : questions courtes.

Question A1 : résolution d'équations.

a) Par la mise en évidence d'un facteur commun,
l'équation devient $(x+8)(6x-14-5x+8)=0$
soit $(x+8)(x-6)=0$. C'est une équation produit nul. $S=\{-8\,;6\}$.

b) $\dfrac{9x^2-6x+1}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(3x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=0$ donc $\begin{cases} 3x-1=0 \\ x\neq 1 \text{ et } x\neq -1 \end{cases}$ d'où $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $\begin{cases} -x+3y=9 \\ 3x-2\,y=-13 \end{cases}$ admet comme couple solution $(-3;2)$.

Question A2 : résolution d'inéquation.

Racines :
$-3(x+4)(2x-6)=0$ ssi $x=-4$ ou $x=3$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=]-\infty;-4[\,\cup\,]3;+\infty[$

Racines :
$x^2-4=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$
Valeurs interdites :
$3x+9\neq 0$ ssi $x\neq -3$
On a donc :

x	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-3[\,\cup\,]-2;2[$

Question A3 : étude de variations.

a) $f:x \longmapsto 2(x+4)^2-4$ sur $]-\infty\,;\,-4[$. Soient a,b de $]-\infty\,;\,-4[$. Alors on a :

$a<b<-4 \Rightarrow a+4<b+4<0 \Rightarrow (a+4)^2>(b+4)^2 \Rightarrow 2(a+4)^2>2(b+4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a+4)^2-4>2(b+4)^2-4 \Rightarrow f(a)>f(b)$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-4[$.

b) $g:x \longmapsto \dfrac{5}{3-x}$ sur $]3\,;\,+\infty[$. Soient a,b de $]3\,;\,+\infty[$. Alors on a :

$a<b \Rightarrow -a>-b \Rightarrow 3-a>3-b \Rightarrow \frac{1}{3-a}<\frac{1}{3-b} \Rightarrow \frac{5}{3-a}<\frac{5}{3-b} \Rightarrow f(a)<f(b)$ donc f est croissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

Question A4 : statistiques descriptives.

On peut s'aider d'un tableau de valeurs que l'on construit à partir du graphique :

nombre d'animaux domestiques	0	1	2	3	4	TOTAL		
effectif	50	90	80	50	30	300		
ni xi	0	90	160	150	120	520	1,73333333	nombre moyen
ECC	50	140	220	270	300		2	nombre médian

a) L'effectif total est 50+90+80+50+30=300.

b) La somme des $n_i x_i$, d'après les calculs présentés ci-dessus, est égale à 520 ; ainsi le nombre moyen d'animaux domestiques pour cette série est $\bar{x}=\frac{520}{300}\approx 1{,}73$.

c) D'après la ligne des effectifs cumulés croissants, et comme l'effectif total est de 300 individus, nous cherchons à situer le $\frac{300}{2}=150^{\text{ème}}$ et le $151^{\text{ème}}$ éléments qui se situent tous les deux sous la valeur 2, donc le nombre médian d'animaux domestiques pour cette série est 2.

Partie B : études de situations concrètes, situation 1

1°) $b(x) = r(x) - c(x) = 6\,400x - (x^2 + 10\,223\,000) = -x^2 + 6\,400x - 10\,223\,000.$

2°) a) on développe $-(x - 3\,200)^2 + 17\,000 = -(x^2 - 6\,400x + 10\,240\,000) + 17\,000 = b(x)$

2°) b) $b(3\,200) = -0^2 + 17\,000 = 17\,000.$

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $(x - 3\,200)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x - 3\,200)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x - 3\,200)^2 + 17\,000 \leq 17\,000$. On a démontré que $b(x) \leq 17\,000$ pour tout x réel, donc $17\,000$ est le maximum atteint par la fonction b, et il est atteint pour $x = 3\,200$.

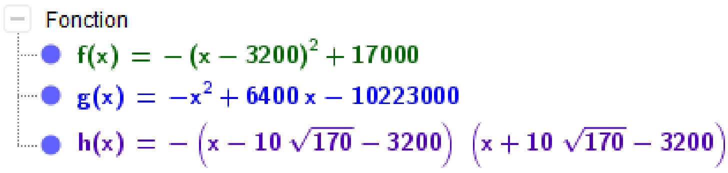
2°) c) tableau des variations :

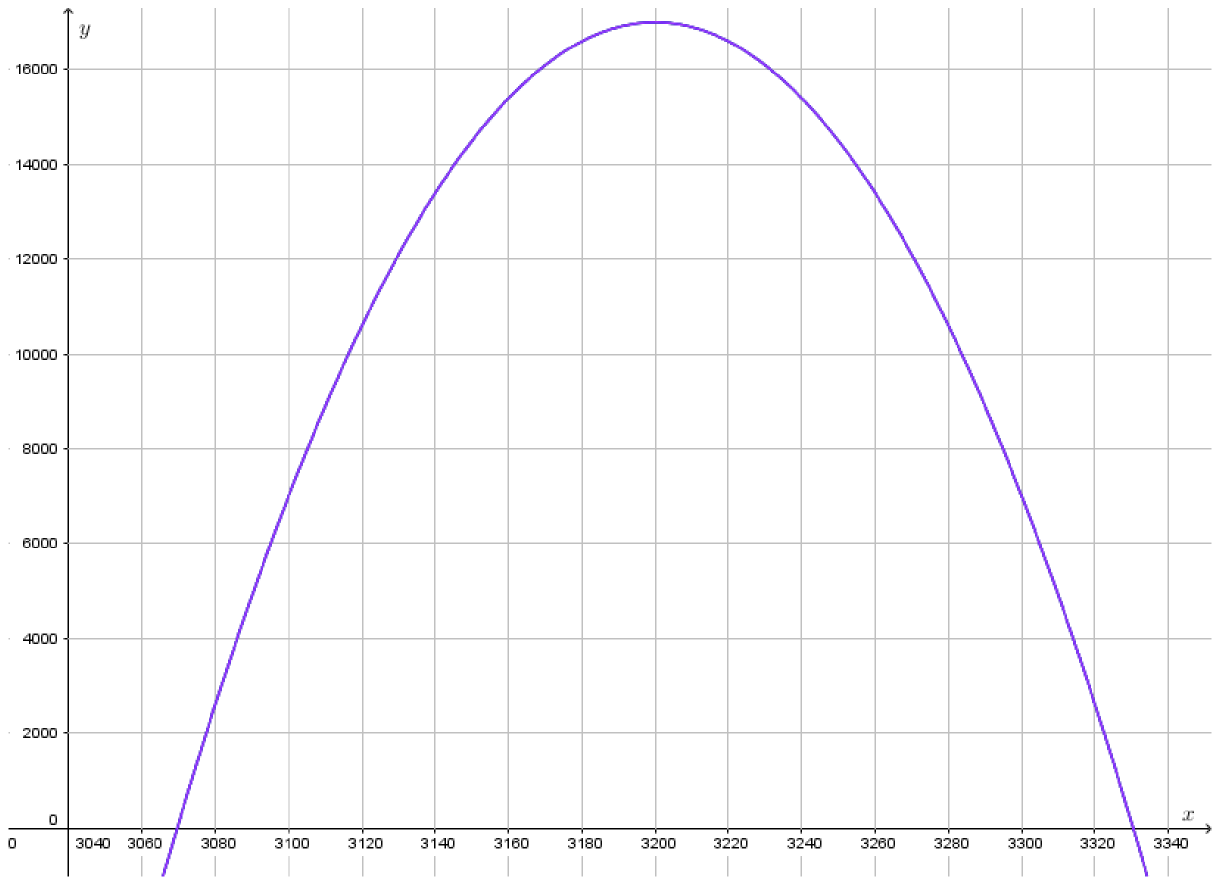
x	$-\infty$	$3\,200$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$17\,000$	$\searrow$

3°) a) l'élève peut avoir travaillé sur la représentation graphique ou bien avec un tableau de valeurs. Il doit avoir trouvé $x_2 \approx 3330{,}38 \approx 3330$.

3°) b) On peut conseiller à l'entreprise de ne pas fabriquer moins de 3070 objets ou plus de 3331 objets car la société serait alors en déficit. Pour un bénéfice maximal il faudra produire 3 200 objets.

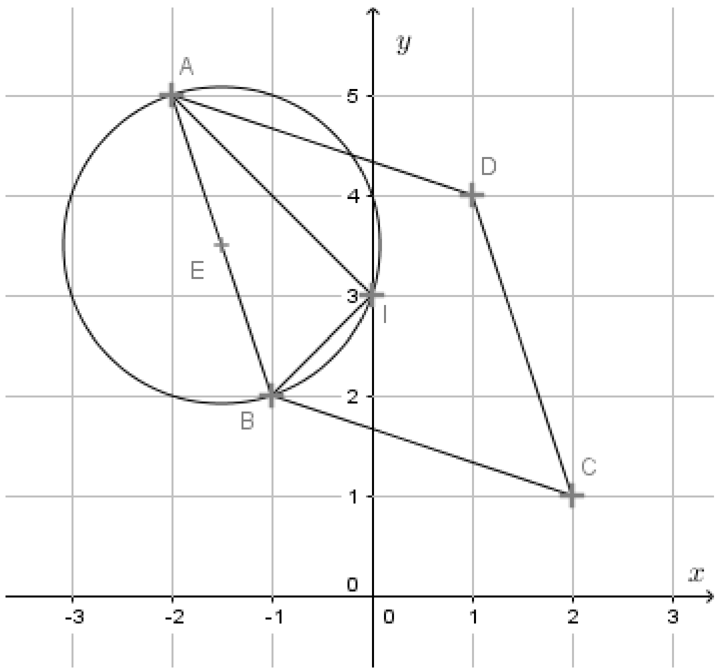
Voici les copies d'écran GeoGebra :





Partie B : études de situations concrètes, situation 2, étude de configuration du plan

Représentation graphique finale :



Correction :

2°) b) I est milieu de $[AC]$ donc $x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$ et $y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ d'où $I(0;3)$.

2°) c) Comme ABCD est un parallélogramme, ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu, donc I est le milieu de [BD]. D'où $x_D = 2x_I - x_B = 0 - (-1) = 1$ et $y_D = 2y_I - y_B = 6 - 2 = 4$. On a donc $D(1;4)$ ce qui est cohérent avec la représentation graphique.

3°) a) $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \big(-1-(-2)\big)^2 + (2-5)^2 = 1 + 9 = 10$
$AI^2 = (x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2 = \big(0-(-2)\big)^2 + (3-5)^2 = 4 + 4 = 8$
$BI^2 = (x_I - x_B)^2 + (y_I - y_B)^2 = \big(0-(-1)\big)^2 + (3-2)^2 = 1 + 1 = 2$
On a $AI^2 + BI^2 = AB^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABI est rectangle en I.

3°) b) Dans le parallélogramme ABCD de centre I, le triangle ABI est rectangle en I, donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Or, si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. Donc le quadrilatère ABCD est un losange.

4°) Le triangle ABI est rectangle en I. Or si un triangle est rectangle, alors il s'inscrit dans un demi-cercle de diamètre son hypoténuse. Donc le triangle ABI s'inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB], donc les points A, B, I appartiennent au cercle dont le centre est E milieu de [AB] et dont un rayon est $\frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$cm.