ÉCOLE, COLLÈGE ET LYCÉE PRIVÉS

EXAMEN BLANC	Classe	Matière	Durée
Avril 2017	2nde	Mathématiques	2 heures

Version corrigée.

Matériel autorisé : copies, crayon, gomme, stylo, matériel de géométrie.

La calculatrice est autorisée et doit obligatoirement être réglée en mode examen avant le début de l'épreuve.

Consignes :

- La notation est sur 20.
- Le devoir doit être rédigé à l'encre noire ou bleue.
- Seuls les dessins géométriques, les bordures des tableaux ou les représentations graphiques doivent être fait au crayon de bois.
- Si une réponse est fausse, il faut barrer le raisonnement incorrect une fois à l'aide d'une règle.
- Pour avoir la totalité des points attribués, il faut, pour chaque question, montrer un raisonnement complet et correctement rédigé, et/ou le détail des calculs nécessaires (sauf précision contraire de l'énoncé).
- La réponse finale doit être mise en évidence.
- Le barème associé à chaque question se trouve à côté des questions.
- Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous préférez.
- Il n'est pas nécessaire de rendre le sujet en fin de devoir (mais indispensable de rendre votre copie).
- Le nom, le prénom et la classe doivent figurer sur chaque feuille.
- Les pages doivent être numérotées.
- Les brouillons ne seront pas corrigés : veillez à utiliser votre temps correctement pour la mise au propre.
- On conseille de passer une durée approximative de 18 minutes sur un exercice valant 3 points, et une durée approximative de 24 minutes sur un exercice valant 4 points.
- Tout ce qui est sale, ou illisible, ne sera pas corrigé.

Partie A : Questions courtes

Ces questions sont indépendantes les unes des autres et sont chacune sur 3 points.

A1. Déterminer la forme canonique, factorisée et développée de la fonction du deuxième degré f dont voici le tableau de signes.
On précise que le maximum atteint par la fonction est 8.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

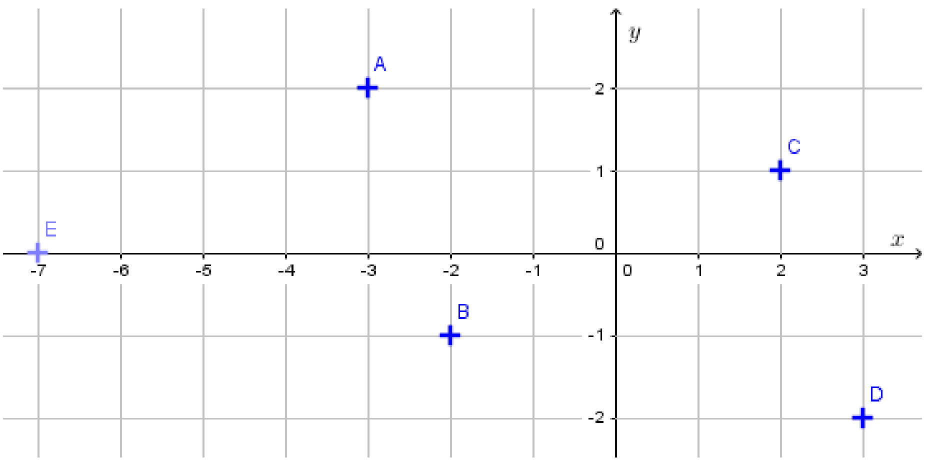
On donne le tableau de signe d'une fonction du second degré : d'après le tableau on déduit que la fonction est concave, donc $a < 0$. On peut calculer l'abscisse du sommet $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et d'après l'énoncé, le maximum atteint est $\beta = 8$ donc le sommet est $(1; 8)$. On en déduit la forme canonique $f(x) = a(x-1)^2 + 8$ et, en utilisant $f(3) = 0$ on obtient $4a = -8$ d'où $a = -2$ donc : $f(x) = -2(x+1)(x-3) = -2(x-1)^2 + 8 = -2x^2 + 4x + 6$

3 pts

A2. Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne : *3 pts*

$$A(-3; 2), B(-2; -1), C(2; 1).$$

D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
et E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
Démontrer que B est le milieu du segment $[ED]$.



D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow AEBC$ est un parallélogramme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.
On a donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BD}$ on en déduit que B est le milieu de $[BD]$.

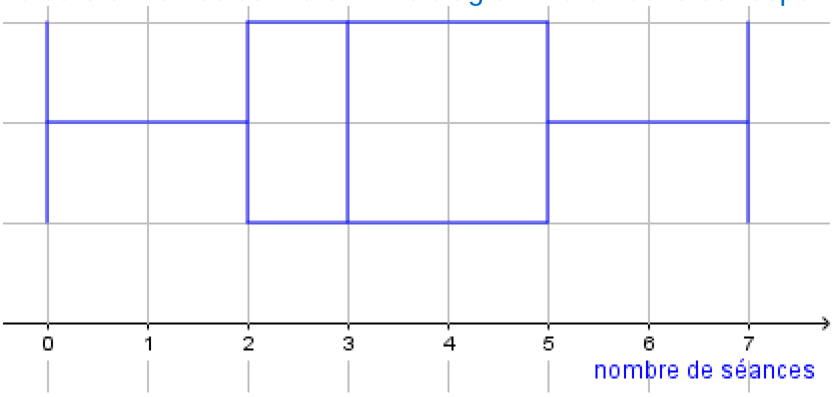
A3. On a demandé à 100 jeunes combien de fois ils sont allés au cinéma au cours des six derniers mois :

Nombre de séances	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	5	10	15	30	10	15	10	5

Construire le diagramme en boîte. Expliquer comment les paramètres nécessaires ont été déterminés.
Je calcule l'effectif cumulé :

ECC	5	15	30	60	70	85	95	100

J'en déduis que le premier quartile ($25^{ème}$ valeur) est 2, la médiane (entre la $50^{ème}$ et $51^{ème}$ valeur) est 3, et le troisième quartile ($75^{ème}$ valeur) est 5. Les valeurs extrêmes sont 0 et 7. Le diagramme en boîte correspondant est :



A4. Alignement

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points suivants :

$$A(-4; 4), B(14; 1), C(2; 3).$$

Les points sont-ils alignés ? Justifier.

Calculons les coefficients directeurs m_1 et m_2 des droites (AB) et (AC).

$$(AB) : m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{14-(-4)} = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

$$(AC) : m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3-4}{2-(-4)} = -\frac{1}{6}$$

Les deux coefficients directeurs sont égaux, on en déduit que les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Comme de plus elles ont un point commun, on en déduit qu'elles sont confondues. Donc les points A, B, C sont bien alignés.

Partie B : exercices concrets.

Les deux exercices sont chacun sur 4 points, et sont indépendants.

Exercice B1 : électricité.

Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1 = 2$ et $R_2 = x$.

1°) Démontrer que l'on a : *0,5 pt*

$$R = \frac{2x}{x+2}$$

2°) On considère la fonction $r : x \longmapsto \frac{2x}{x+2}$ sur $[0; +\infty[$.

a) Démontrer que $r(x)$ peut s'écrire sous la forme $r(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$ *0,5 pt*

b) Etudier les variations de r sur $[0; +\infty[$ *0,75 pt*

c) Démontrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, on a $0 \leq r(x) < 2$ *1 pt*

d) Dresser le tableau des variations de r. *0,5 pt*

3°) Comment choisir R_2 pour avoir $R = 1{,}5$ ohms ? *0,75 pt*

Eléments de correction :

1°) on a $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x}{2x} + \frac{2}{2x} = \frac{x+2}{2x}$ donc $R = \frac{2x}{x+2}$

2°) a) Il faut mettre sous dénominateur commun la forme $2 - \frac{4}{x+2}$, on retrouve ainsi l'expression de départ.

b) r est croissante sur $]-2; +\infty[$.

c) $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} > 0 \Rightarrow -\frac{5}{x+2} < 0 \Rightarrow 2 - \frac{4}{x+2} < 2 \Rightarrow r(x) < 2$ pour tout $x > -2$ donc particulièrement pour tout $x \geq 0$. De plus, si $x \geq 0$ alors $2x \geq 0$ et $x + 2 > 0$ donc le quotient $\frac{2x}{x+2} \geq 0$ si $x \geq 0$.
On peut affirmer que l'on a : $0 \leq r(x) < 2$.

d) on peut construire le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
r	0 ↗	2

3°) on cherche x de $[0; +\infty[$ tel que $r(x) = 1{,}5$ donc tel que $2 - \frac{4}{x+2} = 1{,}5$ donc $-\frac{4}{x+2} = -0{,}5$ et $\frac{4}{x+2} = \frac{1}{2}$. Comme $x + 2 > 0$ sur $[0; +\infty[$ on a $8 = x + 2$ donc $x = 6$.

Exercice B2 : Etude d'une configuration du plan.

http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/NDSV2012/Seconde1B/examen_blanc_2.pdf

On considère un triangle ABC.
Les points M, N et P sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

a) Faire une figure correspondant aux données. *0,75 pt*

b) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. *1 pt*

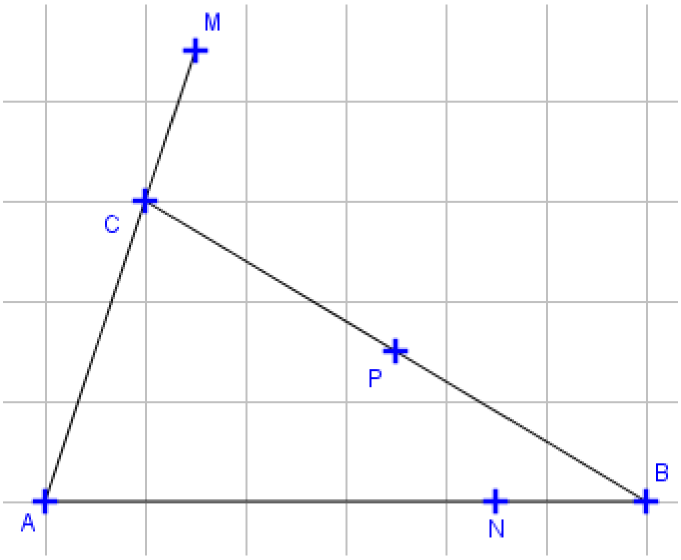
c) Montrer que $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. *1 pt*

d) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires. *0,75 pt*

e) Que peut-on en déduire concernant les points M, N et P ? Justifier. *0,5 pt*

Eléments de correction :

b) On a $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ on en déduit $\overrightarrow{NM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
Donc $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.



c) On a $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$ et
$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NP}$
donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NP}$
donc $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -3\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$
$= -3\overrightarrow{NP}$ donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires.

e) On en déduit que les droites (MN) et (NP) sont parallèles, or comme elles ont un point commun, on en déduit que les points M, N, P sont alignés.