ELEMENTS DE CORRECTION du DEVOIR SUR TABLE n°2 – LUNDI 17/10/2016

Exercice 1. *4 points*

0,5 point par réponse correcte

a) $f(1) = 2$.
b) Les antécédents par f de 1 sont : environ 0,7 ; environ 1,87 et environ 3,05.
c) VRAI.
d) Tout nombre de l'intervalle $[-4{,}3\,;\,-2[$ convient ainsi que environ 2,7.
e) Tout nombre de l'intervalle $]2{,}8\,;\,8]$ convient.
f) Non, c'est impossible. Une fonction ne peut donner, au maximum, qu'une seule image.
g) $f(-0{,}6) = -2$, ou $f(2{,}24) = -2$, ou $f(2{,}9) = -2$.
h) $f(2) = 0$.

Exercice 2 *1 point*

Le couple solution du système $\begin{cases} 6x + 2y = -1 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$ est $\left(-\frac{3}{2}\,;4\right)$, méthodes acceptées : substitution ou combinaisons linéaires.

Exercice 3 *4 points*

On donne la fonction suivante définie sur $[0\,;8]$ par :

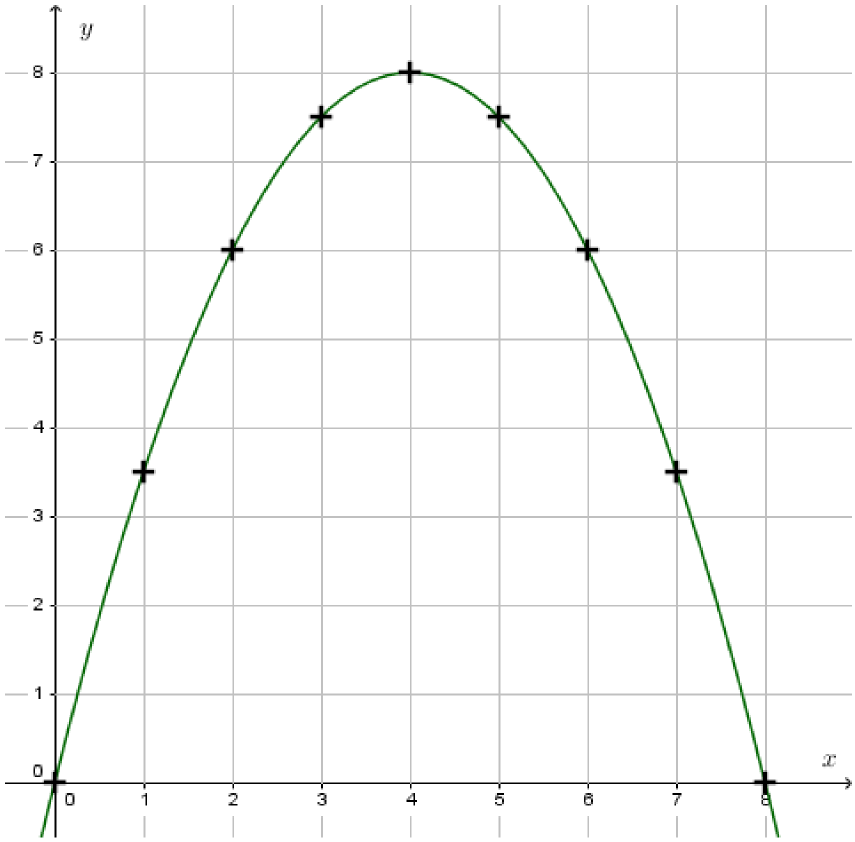
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$$

a) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$. *1 point*

b) Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice (aucun calcul n'est demandé). *1 point*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0

c) Choisir un repère adapté et construire sur la copie la représentation graphique de la fonction f sur $[0\,;8]$. *2 points*



Exercice 4 *3 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

a) $f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ donc le point $(-2\,;3)$ appartient bien à la courbe $\mathcal{C}_f$. *0,75 point*

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0{,}8$ donc le point $\left(\frac{1}{2}\,;0{,}8\right)$ n'appartient pas à la courbe $\mathcal{C}_f$. *0,75 point*

c) Le point $A\ (x_A\,;-8)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$, donc on sait que $f(x_A) = y_A = -8$. Donc on a $-(x_A)^2 + 1 = -8$ d'où $(x_A)^2 = 9$. Il y a donc deux possibilités, $x_A = 3$ ou $x_A = -3$. Comme on sait que $x_A < 0$ alors la solution est : $x_A = -3$. *0,75 point*

d) Le point $B\ (10\,;y_A)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$, donc on a $f(x_B) = y_B$ d'où $y_B = f(x_B) = f(10) = -10^2 + 1 = -99$. *0,75 point*

Exercice 5 *3 points*

a) $$(x+2)^2 - (2x-5)^2 = 0$$

$$[(x+2) - (2x-5)][(x+2) + (2x-5)] = 0$$

$$(x + 2 - 2x + 5)(x + 2 + 2x - 5) = 0$$

$$(7 - x)(3x - 3) = 0 \text{ équation produit nul}$$

1 point

Les solutions réelles de l'équation sont : $x = 7$ ou $x = 1$, $S = \{\,1\,;7\,\}$

b) $\frac{4x^2-25}{4x^2+12x+9} = 0$

$$\begin{cases} 4x^2 - 25 = 0 \\ 4x^2 + 12x + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)(2x+5) = 0 \\ (2x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

1 point

Les solutions de l'équation sont $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

c) $-2x(4x+3) < 8(1 - x - x^2)$

$$-8x^2 - 6x < 8 - 8x - 8x^2$$

$$-6x + 8x < 8$$

$$2x < 8$$

$$x < 4$$

1 point

Les solutions de l'inéquation sont : $S = \left]-\infty\,;4\right[$.

Exercice 6 *5 points*

ABCD est un rectangle dont le périmètre mesure 100m.

On pose $AB = x$.

a) Prouver que $BC = 50 - x$

On sait que pour un rectangle, le périmètre est $\mathcal{P} = 2(L + \ell)$, avec L la longueur et ℓ la largeur. Considérons que $L = AB = x$ et que $\ell = BC$, on sait que $\mathcal{P} = 100$, on a donc l'égalité $100 = 2(x + BC)$ d'où $BC = 50 - x$. *0,5 point*

b) Calculer l'aire du rectangle si $AB = 30$m.

Si AB = 30m, alors BC = 50 – 30 = 20m et l'aire est $\mathcal{A} = L\times\ell = 20\times30 = 600\text{m}^2$. *0,75 point*

Rque : pour AB=30cm=0,3m on trouve alors BC=49,7m donc l'aire est $49{,}7\times0{,}3 = 14{,}91\text{m}^2$.

c) Quelles valeurs peut prendre la variable x ? Répondre avec un intervalle de valeurs.

La contrainte du périmètre égal à 100m nous impose que x peut varier entre 0 et 50, donc l'aire du rectangle existe pour $x \in [0\,;50]$, les cas $x = 0$ et $x = 50$ ne donnant pas des rectangles mais des segments, et donc une aire nulle. *0,75 point*

d) Démontrer que l'aire du rectangle peut se calculer à l'aide de la fonction suivante :

$$\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$$

L'aire du rectangle se calcule ainsi : $\mathcal{A}(x) = L\times\ell$, ici $L = AB = x$ et que $\ell = BC = 50 - x$ donc on a $\mathcal{A}(x) = x(50 - x) = 50x - x^2 = -x^2 + 50x$. *0,75 point*

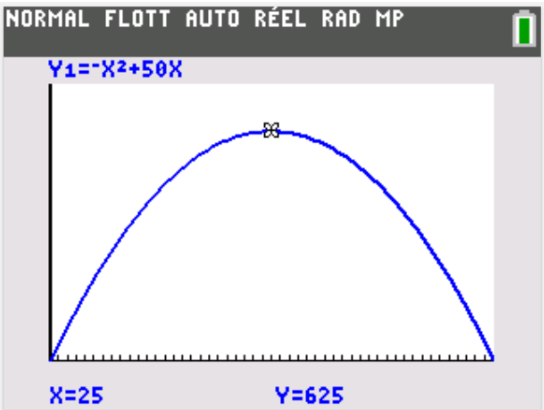
e) Utilise la formule précédente pour déterminer l'aire du rectangle si AB=30m.

$\mathcal{A}(30) = -30^2 + 50\times30 = -900 + 1500 = 600\text{m}^2$, ce qui est cohérent avec la question b). *0,5 point*

$\mathcal{A}(0{,}3) = -0{,}3^2 + 50\times0{,}3 = -0{,}09 + 15 = 14{,}1\text{m}^2$.

f) On cherche les dimensions du rectangle d'aire maximale. Pour cela, représenter graphiquement l'aire du rectangle en fonction de x sur la calculatrice, en choisissant les paramètres suivants : $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 750$.
Quelle est alors la valeur de l'aire maximale obtenue ? Pour quelle valeur de x cette valeur est-elle atteinte ? Répondre le plus précisément possible.

La valeur du maximum est de 650 m2 et elle est atteinte pour x=25. On peut soit utiliser l'outil trace de la calculatrice (à gauche), soit un tableur en choisissant astucieusement le point de départ et le pas (à droite). *1 point*



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
22	616
22.5	618.75
23	621
23.5	622.75
24	624
24.5	624.75
25	625
25.5	624.75
26	624
26.5	622.75
27	621

X=22

g) En déduire les dimensions du rectangle dont l'aire est maximale. *0,75 point*

Pour $x = 25$ on a donc $AB = 25$ et $BC = 50 - 25 = 25$. L'aire est donc maximale lorsque la largeur et la longueur du rectangle font tous les deux 25m, donc lorsque l'on a un carré.