Exercice 1. *1 point*

On donne l'expression suivante :

$$A(x) = 4(x-2)^2 - 16$$

a) Développer et réduire $A(x)$

$A(x) = 4(x^2 - 4x + 4) - 16$
$A(x) = 4x^2 - 16x + 16 - 16$
$A(x) = 4x^2 - 16x$

b) Factoriser $A(x)$

$A(x) = 4x^2 - 16x$
$A(x) = 4x(x - 4)$

Exercice 2. *4 points*

$A = 5 - 2(x-3)(2-4x)$

$A = 5 - (2x-6)(2-4x)$
$A = 5 - (4x - 8x^2 - 12 + 24x)$
$A = 5 - (-8x^2 + 28x - 12)$
$A = 5 + 8x^2 - 28x + 12$
$A = 8x^2 - 28x + 17$

$B = \left(4x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(5x + \frac{3}{2}\right)\left(5x - \frac{3}{2}\right)$

$B = 16x^2 - 2 \times 4x \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 25x^2 - \frac{9}{4}$

$B = 16x^2 + 25x^2 - 12x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$B = 41x^2 - 12x$

$C = (x-2)^3$

$C = (x-2)(x-2)(x-2)$
$C = (x-2)(x^2 - 4x + 4)$
$C = x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8$
$C = x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 4x + 8x - 8$

$C = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$D = 3x^2(2x-5) - 2x(3x^2 - 2x - 1)$

$D = 6x^3 - 15x^2 - (6x^3 - 4x^2 - 2x)$
$D = 6x^3 - 15x^2 - 6x^3 + 4x^2 + 2x$
$D = 6x^3 - 6x^3 + 4x^2 - 15x^2 + 2x$

$D = -11x^2 + 2x$

Exercice 3. *4 points*

Factoriser les expressions suivantes :

$E = (x-5)(2x+7) - (3x+2)(2x+7)$

$E = (2x+7)[x - 5 - (3x+2)]$
$E = (2x+7)(x - 5 - 3x - 2)$
$E = (2x+7)(-2x-7)$
$E = -(2x+7)^2$

$F = 3(x+5)^2 + 2(x+5)(2x-1)$

$F = (x+5)[3(x+5) + 2(2x-1)]$
$F = (x+5)(3x + 15 + 4x - 2)$
$F = (x+5)(7x+13)$

$G = (3x+4)^2 - 4(5x-2)^2$

$G = (3x+4)^2 - [2(5x-2)]^2$
$G = (3x+4)^2 - (10x-4)^2$
$G = [(3x+4) - (10x-4)][(3x+4) + (10x-4)]$
$G = (3x + 4 - 10x + 4)(3x + 4 + 10x - 4)$

$G = 13x(-7x+8)$

$H = (x-3)^2 - 2(x-3)(3x+5) + (3x+5)^2$

Je vais utiliser l'identité remarquable
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
avec $a = (x-3)$ et $b = (3x+5)$
$H = [(x-3) - (3x+5)]^2$
$H = (x - 3 - 3x - 5)^2$
$H = (-2x-8)^2$

$H = (2x+8)^2$ (car le carré d'un nombre ou de son opposé sont égaux).

Exercice 7 *2 points*

« La différence entre le carré d'un nombre entier et le carré du nombre entier suivant est égale à la somme entre ces deux nombres. »

Est-ce correct ou faux ? Justifier.

Je prends un nombre : x. Son suivant est $x+1$.

Réponses acceptées :

$$\begin{aligned}(x+1)^2-x^2 &= x^2+2x+1-x^2\\ &= 2x+1\\ &= x+x+1\end{aligned}$$

On a bien retrouvé la somme entre les deux nombres de départ.

$$\begin{aligned}x^2-(x+1)^2 &= x^2-x^2-2x-1\\ &= -2x-1\\ &= -(2x+1)\\ &= -(x+x+1)\end{aligned}$$

On a obtenu l'opposé de la somme entre les deux nombres de départ.

Exercice 4. *3 points*

On considère une expression $E(x)$ pouvant avoir plusieurs écritures possibles :

$$E(x) = 2(x-3)^2-8$$
$$E(x) = 2x^2-12x+10$$
$$E(x) = 2(x-1)(x-5)$$

a) Prouver par calcul que les différentes formes de $E(x)$ sont effectivement égales entre elles.

1 point

$E(x) = 2(x-3)^2-8 = 2(x^2-6x+9)-8 = 2x^2-12x+18-8 = 2x^2-12x+10$

$E(x) = 2(x-1)(x-5) = (2x-2)(x-5) = (2x^2-10x-2x+10 = 2x^2-12x+10$

Donc les trois formes sont effectivement égales entre elles.

On souhaite maintenant effectuer plusieurs opérations, pour chacune d'entre elles, choisir la forme de $E(x)$ la plus adaptée puis répondre à la question.

b) Calculer $E(5)$

0,5 point

$E(x) = 2(5-1)(5-5) = 0$ car un des facteurs est nul.

c) Calculer $E(0)$

0,5 point

$E(0) = 2\times 0^2-12\times 0+10 = 10$ seul terme non nul.

d) Résoudre $E(x)=0$

$E(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-5)=0$ c'est une équation produit nul, les deux solutions sont évidentes *0,5 point*

$$S=\{1;5\}$$

e) Résoudre $E(x)=-8$

$$\begin{aligned}E(x)=-8 &\Leftrightarrow 2(x-3)^2-8=-8\\ &\Leftrightarrow 2(x-3)^2=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2=0\\ &\Rightarrow x-3=0\end{aligned}$$

0,5 point

L'équation $E(x)=-8$ admet une unique solution : $x=3$.

Exercice 5. *4 points*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(2x-5)^2 = (5-4x)^2$

$(2x-5)^2 - (5-4x)^2 = 0$
$[(2x-5)-(5-4x)][(2x-5)+(5-4x)] = 0$
$(2x-5-5+4x)(2x-5+5-4x) = 0$
$-2x(6x-10) = 0$ *1 point*

C'est une équation produit nul, on a donc deux solutions : $x = 0$ ou $6x - 10 = 0$

C'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{0\,;\frac{5}{3}\right\}$

b) $0{,}25x^2 + x = -1$

$0{,}25x^2 + x + 1 = 0$
$(0{,}5x)^2 + 2 \times 0{,}5x \times 1 + 1^2 = 0$
$(0{,}5x+1)^2 = 0$
$0{,}5x + 1 = 0$ *1 point*
$x = -\dfrac{1}{0{,}5}$
$x = -2$

L'équation admet une unique solution : $x = -2$.

c) $\dfrac{2x+5}{3x-5} = 0$

1 point

$\begin{cases} 2x+5 = 0 \\ 3x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -5 \\ 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ x \neq \dfrac{5}{3} \end{cases}$ donc $S = \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

d) $\dfrac{2-3x}{x-4} = \dfrac{2x-1}{-x+2}$

Pour appliquer le produit en croix, je dois déterminer les valeurs interdites :

Ici le premier dénominateur donnera $x - 4 \neq 0$ donc $x \neq 4$; et le deuxième dénominateur donnera $-x + 2 \neq 0$ donc $x \neq 2$.

$\dfrac{2-3x}{x-4} = \dfrac{2x-1}{-x+2} \Rightarrow (2-3x)(-x+2) = (2x-1)(x-4) \quad avec\ x \neq 4\ et\ x \neq 2$

$\Rightarrow -2x + 4 + 3x^2 - 6x = 2x^2 - 8x - x + 4 \quad avec\ x \neq 4\ et\ x \neq 2$ *1 point*

$\Rightarrow 3x^2 - 2x^2 - 2x - 6x + 9x + 4 - 4 = 0 \quad avec\ x \neq 4\ et\ x \neq 2$

$\Rightarrow x^2 + x = 0 \quad avec\ x \neq 4\ et\ x \neq 2$

$\Rightarrow x(x+1) = 0 \quad avec\ x \neq 4\ et\ x \neq 2$

On a donc deux solutions : $x = 0$ ou $x = -1$, ces solutions sont bien différentes des valeurs interdites, donc $S = \{-1\,;0\}$.

Exercice 6. *2 points*

Le nombre d'or.

Le nombre d'or est un nombre particulier, désigné par la lettre grecque « phi » : φ.
Ce nombre a été utilisé par de nombreux peintres et architectes de la Renaissance italienne, en particulier Léonard de Vinci.

a) Le nombre d'or a les propriétés algébriques suivantes :

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Utilise une de ces propriétés pour vérifier que φ est solution de l'équation : *0,25 point*

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Je remplace x par φ et je trouve : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$; or comme $\varphi^2 = \varphi + 1$ je peux écrire : $\varphi + 1 - \varphi - 1 = 0$ d'où $0 = 0$, donc φ est bien une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Vérifie que l'on a :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

0,5 point

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x + 1$$

c) Résous l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ puis déduis-en la valeur exacte du nombre d'or. (on ne considèrera que la solution positive).

$x^2 - x - 1 = 0$ est équivalent, d'après la question précédente, à :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

Je peux donc factoriser par l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x - \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

0.75 point

C'est une équation produit nul, elle a donc deux solutions :

$$x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$$
$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Comme seule la solution positive est retenue, et comme on sait que $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, on en déduit donc que la valeur exacte du nombre d'or est :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

d) Simplifie le plus possible le nombre : *0,5 point*

$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1$$

$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1 = (\varphi^2 - 1)^2 - 1$$
$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1 = (\varphi + 1 - 1)^2 - 1$$
$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1 = \varphi^2 - 1$$
$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1 = \varphi + 1 - 1$$
$$[(\varphi - 1)(\varphi + 1)]^2 - 1 = \varphi.$$