PROBABILITES

1°) Rappels en statistiques

Film préféré des élèves	Nos étoiles contraires	La haine	Dead pool	Point Break	The first time	Spectre	TOTAL
Effectif	28	37	37	42	24	40	208
Fréquences	0,13	0,18	0,18	0,20	0,12	0,19	1
Fréquences en pourcentage	13	18	18	20	12	19	100

Le caractère étudié ici est qualitatif. L'effectif total, noté N, est de 208.

Les effectifs de chaque valeur sont repérés par la notation n_i ($n_1 = 28, n_2 = 37, \dots, n_6 = 40$).

La fréquence est un indicateur de répartition des effectifs sur les différentes valeurs : c'est une proportion. La fréquence est un nombre compris entre 0 et 1 et la somme de toutes les fréquences fait toujours 1.

La fréquence peut être donnée sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal, ou d'un pourcentage.

La fréquence est repérée par la notation f_i et on a : $\boxed{f_i = \frac{n_i}{N}}$ ou $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$ si on travaille en pourcentage.

Plus le nombre d'individus interrogés est grand, plus la fréquence s'approche d'une fréquence « idéale » appelée probabilité.

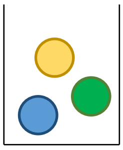
2°) Notion de probabilité, vocabulaire.

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne connaîtra le résultat que lorsqu'elle sera terminée.

Un résultat possible de l'expérience aléatoire s'appelle une issue.

L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exemples :

	A	B	C
Support de l'expérience	 Une urne opaque avec trois boules indiscernables au toucher.	 Un dé à six faces non truqué ou équilibré	 Une pièce équilibrée avec un côté PILE et un côté FACE
Expérience aléatoire	On pioche une boule et on regarde sa couleur.	On lance le dé et on regarde le nombre obtenu.	On lance la pièce et on regarde si on a pile ou face.
Univers associé	{Jaune ; Bleue ; Verte}	{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}	{Pile ; Face}

Dans l'exemple A, on appelle tirage le fait de piocher au hasard une boule dans l'urne.
Chacune des trois issues de l'univers a la même chance d'être réalisée que les autres : on dit que le tirage est équiprobable. On a 1 chance sur 3 d'avoir la boule jaune : on dit que la probabilité que la boule tirée soit jaune est $\frac{1}{3}$.

« La boule tirée est jaune ou verte » est un événement réalisé par deux issues. La probabilité de cet événement est la somme des probabilités de chaque issue concernée : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
« La boule tirée est jaune » est un événement réalisé par une seule issue : on dit que c'est un événement élémentaire.

Dans l'exemple B, l'événement « j'obtiens un nombre entre 1 et 6 » est réalisé par toutes les issues de l'univers : c'est un événement certain et sa probabilité est 1.
En revanche, l'événement « j'obtiens un 7 » n'est réalisé par aucune issue : c'est un événement impossible et sa probabilité est 0.

Une probabilité est un nombre exprimé sous forme décimale ou fractionnaire.
Une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1.
L'issue d'une expérience aléatoire ne dépend pas des résultats précédents.

3°) Probabilité d'un événement, événement contraire.

Une façon de calculer la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ favorables\ \text{à}\ A}{nombre\ total\ d'issues}$$

Cette formule ne fonctionne que si j'ai une situation d'équiprobabilité.

Dans le cas plus général, on retiendra : la probabilité que l'événement A se réalise est égale à la somme des probabilités des issues qui le composent.

Supposons que l'on travaille sur un univers $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

L'événement A : "le nombre est inférieur ou égal à 2" est constitué des issues 1 et 2.

L'événement constitué par 3, 4, 5, 6 ; que l'on pourrait définir par « le nombre est supérieur strictement à 2 » est son complémentaire dans l'univers.

On notera $A = \{1\,;2\}$ et $\bar{A} = \{3\,;4\,;5\,;6\}$; on a $p(A) = \frac{2}{6}$ et $p(\bar{A}) = \frac{4}{6}$ on observe que $\boxed{p(A) + p(\bar{A}) = 1}$

Parfois, pour déterminer la probabilité d'un événement, il sera plus facile de passer par son complémentaire.

4°) Les outils permettant de calculer des probabilités.

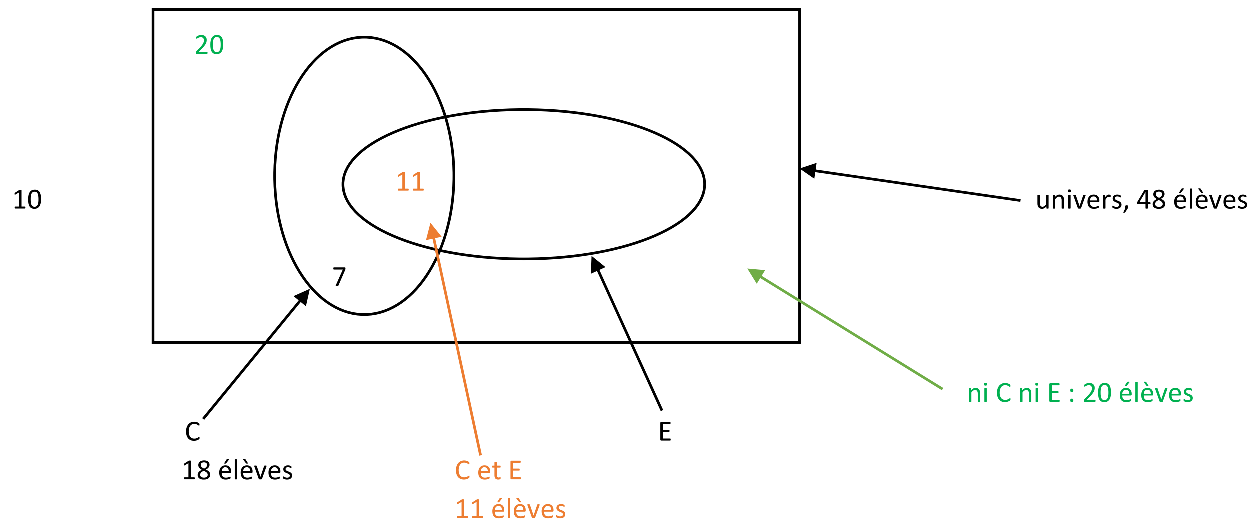
Une des difficultés sera de bien comprendre quel est l'outil le mieux adapté.

a. Un diagramme de Venn.

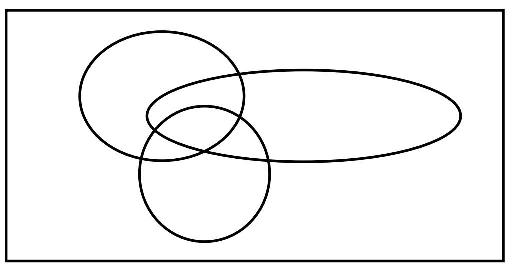
Dans la cour il y a 48 élèves. Parmi eux, 18 suivent le cours de chimie. On sait que 11 de ces élèves font à la fois chimie et escalade, et on sait que 20 des élèves ne font ni chimie, ni escalade.

On pioche un élève au hasard dans la cour et on regarde quelles options il a choisies.

On nomme C : « fait chimie » et E : « fait escalade ».



Exercice (un peu difficile) : pour les choix d'options de langue vivante les 50 élèves peuvent décider : italien, russe, ou espagnol. Ils peuvent choisir 0, 1, 2 ou 3 langues à étudier.
4 élèves ont choisi les trois langues, 2 élèves ont choisi aucune langue vivante.
10 élèves font Russe, 40 élèves font Italien, 20 élèves font espagnol.
7 élèves font italien et russe, 5 élèves font russe et espagnol, 14 élèves font italien et espagnol.



b. Les schémas.

Parfois il est plus simple de faire un schéma qui représente la situation : une urne qui contient des boules, …

c. Le tableau à double entrée

On utilise un tableau à double entrée dans les cas suivants :

- Lancer de deux dés
- Cas assimilés

Exemple : on lance deux dés à six faces et on s'intéresse à la différence entre le plus grand nombre obtenu et le plus petit nombre obtenu.

différence		dé 2					
		1	2	3	4	5	6
dé 1	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Les issues possibles sont : $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ et ce n'est pas une situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'avoir un 0 est $\frac{6}{36}$

La probabilité d'avoir un 2 est $\frac{8}{36}$

La probabilité d'avoir un 4 est $\frac{4}{36}$

La probabilité d'avoir un nombre pair est $\frac{6+8+4}{36} = \frac{18}{36}$

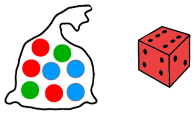
La probabilité de ne pas avoir un 2 est $1 - \frac{8}{36} = \frac{28}{36}$

d. L'arbre pondéré

On utilise l'arbre pondéré lorsque l'on répète une épreuve, ou lorsque l'on fait deux épreuves successives.

Exemple :

23 Un jeu consiste à tirer une boule dans le sac ci-dessous puis à lancer un dé ordinaire à six faces.



On gagne lorsqu'on a tiré une boule bleue et obtenu un multiple de 3 sur le dé.
Quelle est la probabilité de gagner ?

Je nomme les évènements : B : « on a tiré une boule bleue » et T : « on a eu un multiple de trois au dé »

1$^{\text{ère}}$ expérience	2$^{\text{ème}}$ expérience	issues	probabilités
$\frac{3}{8}$ B	$\frac{1}{3}$ T	B et T	$p(B\ et\ T) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$
	$\frac{2}{3}$ $\bar{T}$	B et $\bar{T}$	$p(B\ et\ \bar{T}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{8} = \frac{6}{24}$
$\frac{5}{8}$ $\bar{B}$	$\frac{1}{3}$ T	$\bar{B}$ et T	$p(\bar{B}\ et\ T) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24} = \frac{5}{24}$
	$\frac{2}{3}$ $\bar{T}$	$\bar{B}$ et $\bar{T}$	$p(\bar{B}\ et\ \bar{T}) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{24} = \frac{10}{24}$

Arbre bien construit = la somme fait 1

La probabilité d'avoir une boule bleue et un multiple de 3 est : $\frac{3}{24}$

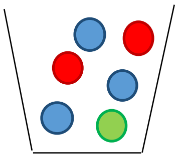
La probabilité d'avoir une boule bleue est : $\frac{3}{24} + \frac{6}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

La probabilité d'avoir un multiple de trois est : $\frac{3}{24} + \frac{5}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

5°) Loi de probabilité.

On considère une expérience aléatoire sur un univers.
La donnée de toutes les issues de l'univers (événements élémentaires) **ainsi que leur probabilité** constitue la loi de probabilité de l'expérience.
On donne souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

Exemples :



Je pioche une boule dans l'urne et je regarde sa couleur. Voici la loi de probabilité :

issues	Bleue	Rouge	Verte	TOTAL
probabilités	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Remarque : la somme des probabilités des issues fait TOUJOURS 1

Dans un jeu de 54 cartes, je pioche une carte et je regarde sa valeur.
La loi de probabilité est :
C'est une situation d'équiprobabilité donc chacune des 54 cartes a une probabilité de $\frac{1}{54}$ d'être piochée.
Remarque : la loi de probabilité est souvent donnée par un tableau mais elle peut aussi être donnée par une phrase.

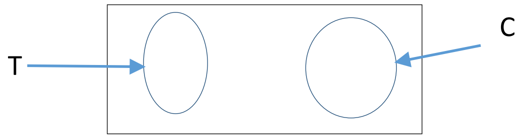
6°) Règles de calcul.

On a déjà vu l'événement complémentaire
Si A est un événement, $\bar{A}$ est son événement complémentaire dans l'univers et $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Exemple :
D'après l'exemple de l'urne, si V : « la boule est verte » avec $p(V) = \frac{1}{6}$
Alors $\bar{V}$: « la boule n'est pas verte » ou encore $\bar{V}$: « la boule est rouge ou bleue », on a $p(\bar{V}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Dans certains cas, on peut avoir, pour une expérience, deux événements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps. Dans ce cas, on dit que les événements sont incompatibles.

Exemple :
D'après l'exemple du jeu de cartes, les événements C : « avoir un cœur » et T : « avoir un trèfle » sont incompatibles.



7°) Réunion et intersection d'événements.

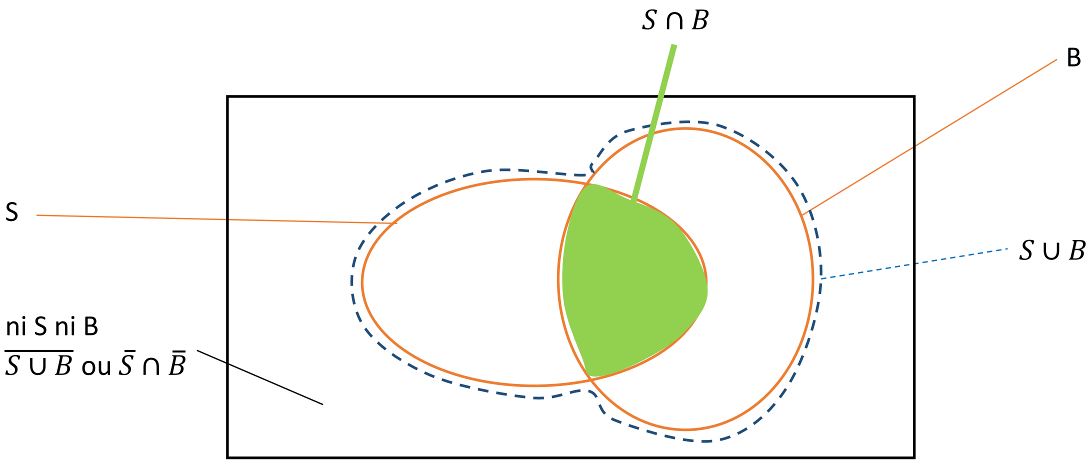
En mathématiques, on doit apprendre à bien différencier le « et » et le « ou ».

Exemple : on considère la cour de l'école, sur laquelle se trouvent 250 enfants.
On note :
B : « l'enfant est entrain de jouer au ballon »
S : « l'enfant a son sac sur le dos »

La réunion des ensembles B et S se note : $B \cup S$ (lire : B union S).
$B \cup S$ est réalisé dès que l'un des deux ensembles est réalisé. La réunion correspond au « ou », on peut définir l'événement $B \cup S$ par : « l'enfant joue au ballon ou porte son sac sur le dos ».

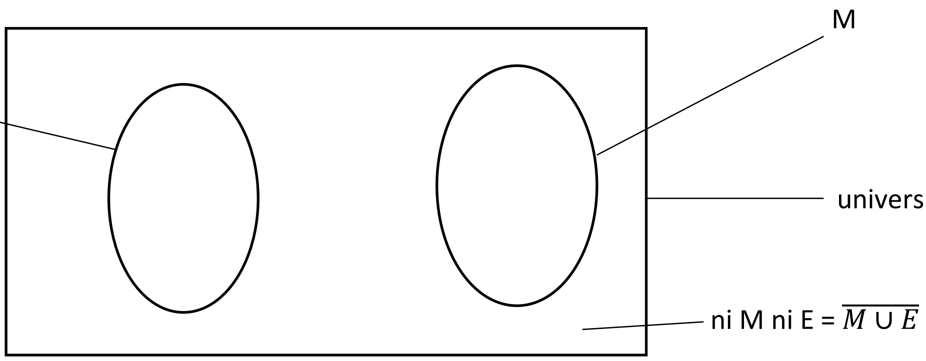
L'intersection des événements B et S se note : $B \cap S$ (lire : B inter S).
$B \cap S$ est réalisé dès que les deux événements B et S sont simultanément réalisés. L'intersection correspond au « et », on peut définir l'événement $B \cap S$ par : « l'enfant joue au ballon et porte son sac sur le dos ».

Représentation sur un diagramme de Venn :



$$\boxed{p(S \cup B) = p(S) + p(B) - p(S \cap B)} \quad et \quad \boxed{p(\overline{S \cup B}) = 1 - p(S \cup B)}$$

Cas particulier : si les deux événements sont incompatibles. Par exemple,
E : "$l'élève\ est\ endormi$" et M : "$l'élève\ fait\ un\ exercice\ de\ maths$"



Dans ce cas on a :
$M \cap E = \emptyset$ *ensemble vide*

$$\boxed{\begin{array}{c} M\ et\ E\ sont\ incompatibles \\ p(M \cap E) = 0 \\ p(M \cup E) = p(M) + p(E) \end{array}}$$

8°) Indépendance d'événements.

On suppose que A et B sont deux événements d'un univers E.
On a équivalence entre :

$$\text{A et B sont indépendants} \qquad et \qquad p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$

Exemple :
On a trois événements d'un univers A, B, C tels que :

$$p(A) = 0{,}7 \quad p(B) = 0{,}5 \quad p(C) = 0{,}4 \quad p(A \cap C) = 0{,}3 \quad p(B \cap C) = 0{,}2$$

a. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

$p(A) \times p(C) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$
$p(A) \times p(C) \neq p(A \cap C)$ donc les événements A et C ne sont pas indépendants.

b. Les événements B et C sont-ils indépendants ?

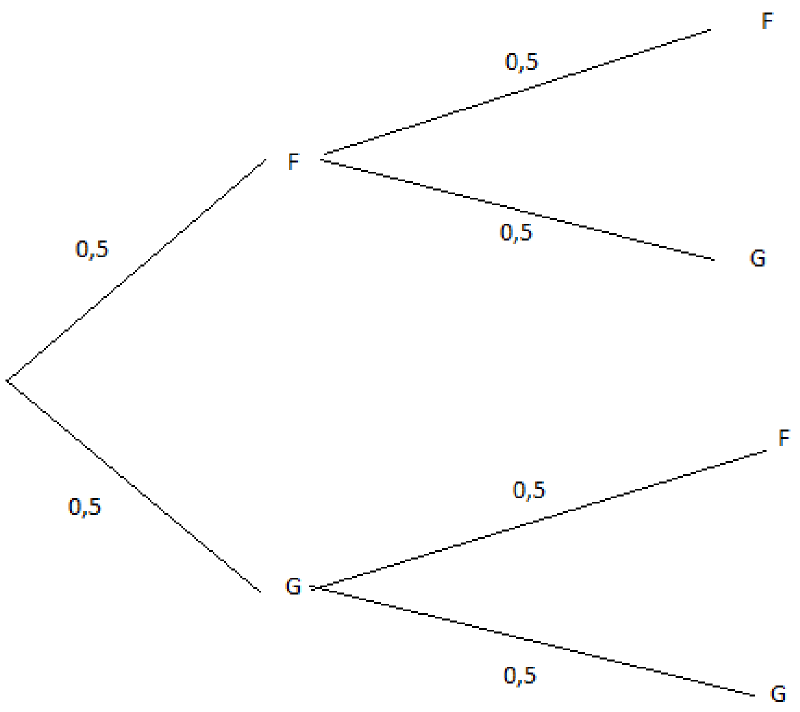
$p(B) \times p(C) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}20$
$p(B) \times p(C) = p(B \cap C)$ donc les événements B et C sont indépendants.

Exercice résolu (sésamath)

6 On tire au hasard une pièce d'un échiquier.
Soit C l'événement : « la pièce est une tour ou elle est blanche ».
Exprimer $\overline{C}$ par une phrase.

On note T : « la pièce est une tour », B : « la pièce est blanche »
Il y a 4 tours dans un jeu d'échec, dont 2 blanches et 2 noires, parmi les 32 pièces de l'échiquier.
On a donc $p(T) = \frac{4}{32}$, $p(B) = \frac{16}{32}$ et $p(T \cap B) = \frac{2}{32}$
D'où $p(C) = p(T \cap B) = p(T) + p(B) - p(T \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{16}{32} - \frac{2}{32} = \frac{18}{32}$
La probabilité cherchée est $p(\bar{C}) = p(\overline{T \cap B}) = 1 - p(T \cap B) = 1 - \frac{18}{32} = \frac{14}{32}$
$\bar{C}$: « la pièce n'est ni une tour, ni blanche ».

Question 2 : Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils soient de sexe différent ?



p(F et F)=p(F$\cap$F)=0,5*0,5=0,25

p(F et G)=p(F$\cap$G)=0,5*0,5=0,25

p(G et F)=p(G$\cap$F)=0,5*0,5=0,25

p(G et G)=p(G$\cap$G)=0,5*0,5=0,25

La probabilité cherchée est donc 0,25+0,25=0,5.