Chapitre 7 ANALYSE

HYPERBOLES

1°) La fonction inverse.

Ensemble de définition :

La fonction inverse $f\ :x\ \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie pour tout $x \neq 0$, on dit : $Dom_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$.

Sur la représentation graphique, l'ensemble de définition est la projection de la fonction sur l'axe des abscisses. C'est l'ensemble de tous les antécédents qui ont une image.

En revanche, si on lit la projection de la fonction sur l'axe des ordonnées, on dit que l'on a l'ensemble image de la fonction. C'est l'ensemble de toutes les images possibles par la fonction.

Asymptotes :

La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**. Elle se compose de **deux morceaux**, « bloqués » par des asymptotes.

Les asymptotes sont des droites particulières : la représentation graphique en sera toujours de plus en plus proche, mais ne pourra jamais ni la toucher, ni la traverser.

On a ici deux asymptotes : une **asymptote horizontale** (axe des abscisses, droite $x = 0$) et une **asymptote verticale** (axe des ordonnes, droite $y = 0$).

L'hyperbole a un **centre de symétrie** qui est le point d'intersection entre les deux asymptotes (ici, l'origine du repère).

Tableau des variations :

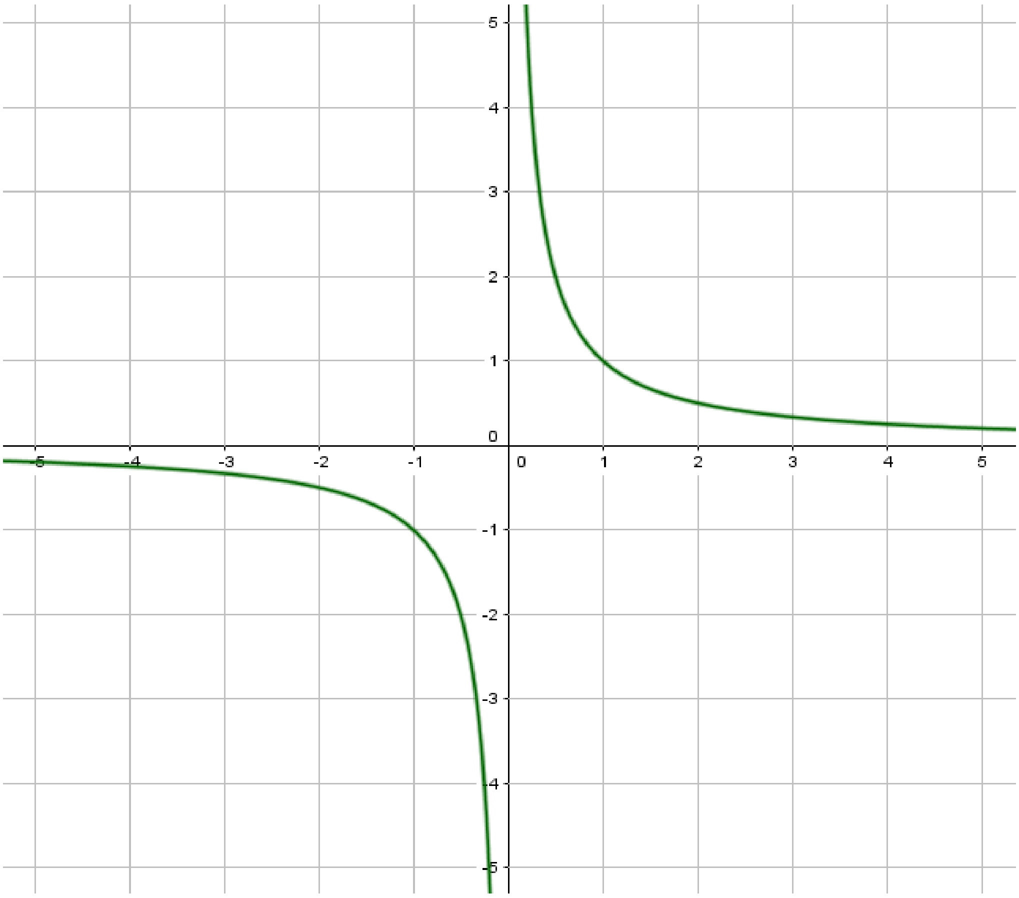
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, on peut résumer dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 0$

Lecture sur l'axe des abscisses

Lecture sur l'axe des ordonnées

Représentation graphique :



Limites :

On a quatre limites, liées aux asymptotes :

- Limites de l'asymptote horizontale :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

- Limites de l'asymptote verticale :

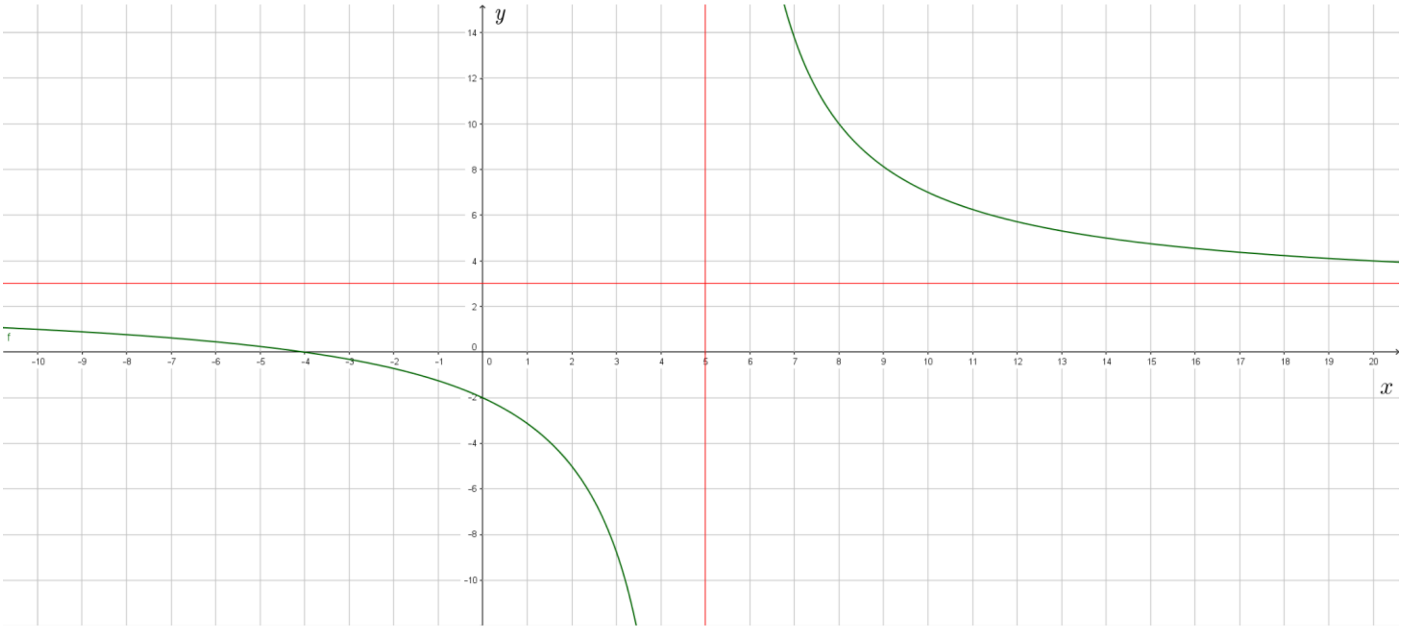
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Il n'y a aucun point d'intersection avec les axes du repère.

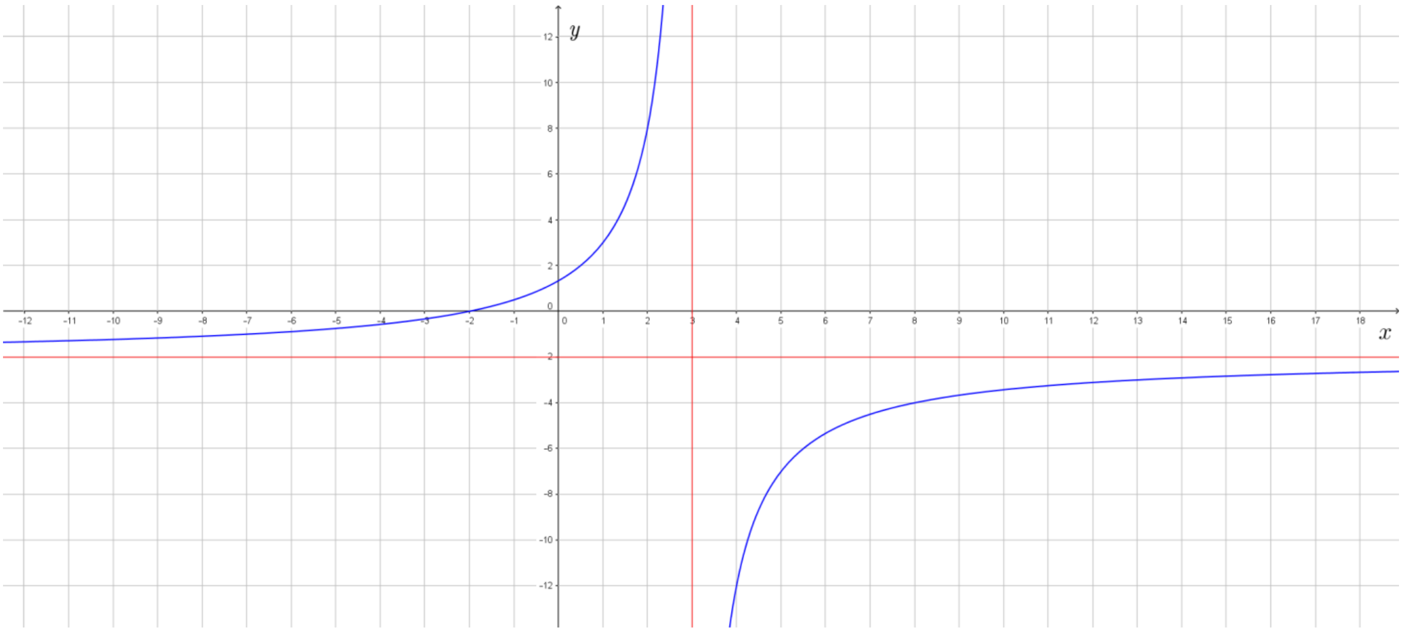
2°) Hyperboles : lectures graphiques.

Nous travaillons avec deux hyperboles :

Hyperbole A, représentant une fonction f :



Hyperbole B, représentant une fonction g :



Exercice/exemple : lecture du domaine de définition et de l'ensemble image

Conseil et méthode : tracer les asymptotes si elles ne sont pas déjà représentées. L'asymptote verticale permet de savoir quelle valeur il faut retirer du domaine de définition. L'asymptote horizontale permet de savoir quelle valeur il faut éliminer de l'ensemble image.

f	g
$Dom_f =]-\infty;\ 5\,[\cup]\ 5\ ;+\infty[$	$Dom_g =]-\infty;\quad [\cup]\quad ;+\infty[$
$Im_f =]-\infty;\ 3\ [\cup]\ 3\ ;+\infty[$	$Im_g =]-\infty;\quad [\cup]\quad ;+\infty[$

Exercice/Exemple : lecture graphique des équations des deux asymptotes, coordonnées du centre de symétrie

Conseil et méthode : tracer les asymptotes si elles ne sont pas déjà représentées. On rappelle qu'une droite verticale a une équation de la forme $x = k$ et qu'une droite horizontale a une équation de la forme $y = k$.

f	g
Asymptote verticale : $x = 5$ Asymptote horizontale : $y = 3$ Le centre de symétrie est : $(5; 3)$	Asymptote verticale : $x =$ Asymptote horizontale : $y =$ Le centre de symétrie est :

Exercice/Exemple : construction du tableau des variations

Conseil et méthode : apprendre par cœur la structure de base du tableau des variations et bien retenir que sur la première ligne, on représente l'axe des abscisses, sur la deuxième ligne, les informations correspondent à l'axe des ordonnées. Ne pas oublier d'écrire une valeur en chaque début de flèche et en chaque fin de flèche.

f

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f	3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5

g

x	$-\infty$	‖	$+\infty$
g		‖	

Exercice/Exemple : lecture graphique des zéros et construction du tableau de signes

Conseil et méthode : les zéros d'une fonction sont les points d'intersection avec l'axe des abscisses. Dans la première ligne du tableau de signes, la valeur interdite ainsi que le(s) zéro(s) doivent figurer, par ordre croissant. Ne pas oublier de tracer une double barre en dessous de la valeur interdite.

f

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	‖	$+$	

g

x	$-\infty$	$+\infty$
g		

Exercice/exemple : écris les limites à partir du tableau des variations

x	$-\infty$		3		$+\infty$
h	-4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	

lecture sur l'axe des abscisses

lecture sur l'axe des ordonnées

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -4 \quad ; \quad \lim_{x\to3^-} h(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to3^+} h(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = -4$$

Donne les limites de la fonction f :

Donne les limites de la fonction g :

Comment fabriquer une asymptote ?

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ou } f(x) = A + \frac{B}{cx+d}$$

$$f(x) = \frac{3x-6}{x+4} \quad ; \quad g(x) = \frac{2-x}{2x+8} \quad ; \quad h(x) = 4 + \frac{1}{0{,}2x+1} \quad ; \quad k(x) = 1 - \frac{2}{0{,}1x-5}$$

POUR LA RENTREE : faire étude complète de ces quatre hyperboles

3°) Hyperboles : étude algébrique.

Les hyperboles sont les représentations graphiques des fonctions de la forme :

$$x \mapsto A + \frac{B}{cx+d} \qquad ; \qquad x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Avec $A, B, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

On travaillera avec les fonctions suivantes : $f(x) = -2 + \frac{3}{x+4}$; $g(x) = 3 - \frac{1}{x-2}$; $h(x) = \frac{2x+10}{-0{,}5x+3}$; $j(x) = \frac{-x+1}{-3x-9}$

a. Ensemble de définition et ensemble image.

L'ensemble de définition des fonctions est : tous les réels sauf le nombre qui annule le dénominateur.

On note : $Dom_{fonction} = \left]-\infty\,;\, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}\,;\, +\infty\right[$

Pour f : $Dom_f =]-\infty\,;\, -4[\cup]-4\,;\, +\infty[$

Pour g : $Dom_g =]-\infty\,;\, 2[\cup]2\,;\, +\infty[$

Pour h : $Dom_h =]-\infty\,;\, 6[\cup]6\,;\, +\infty[$ (avec $6 = -\frac{3}{-0{,}5}$)

Pour j : $Dom_j =]-\infty\,;\, -3[\cup]-3\,;\, +\infty[$

L'ensemble image de la fonction est : tous les nombres qui sont atteints par la fonction.

Si la fonction est de type $x \mapsto A + \frac{B}{cx+d}$ alors c'est le nombre A qui ne sera jamais atteint.

Si la fonction est de type $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ alors c'est le nombre $\frac{a}{c}$ qui ne sera jamais atteint.

Pour f : $Im_f =]-\infty\,;\, -2[\cup]-2\,;\, +\infty[$

Pour g : $Im_g =]-\infty\,; 3[\cup]3\,;\, +\infty[$

Pour h : $Im_h =]-\infty\,;\, -4[\cup]-4\,;\, +\infty[$

Pour j : $Im_j = \left]-\infty\,; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; \,+\infty\right[$

b. Asymptotes et centre de symétrie

$$x \mapsto A + \frac{B}{cx+d} \qquad ; \qquad x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

L'asymptote verticale a pour équation : $x = -\frac{d}{c}$ (il s'agit de la valeur interdite).

L'asymptote horizontale a pour équation $y = A$ ou $y = \frac{a}{c}$ (il s'agit de la valeur jamais atteinte).

Le centre de symétrie est le point d'intersection entre les asymptotes : $\left(-\frac{d}{c}\,;A\right)$ ou $\left(-\frac{d}{c}\,;\frac{a}{c}\right)$.

	Asymptote verticale	Asymptote horizontale	Centre de symétrie
$f(x) = -2 + \dfrac{3}{x+4}$			
$g(x) = 3 - \dfrac{1}{x-2}$			
$h(x) = \dfrac{2x+10}{-0{,}5x+3}$			
$j(x) = \dfrac{-x+1}{-3x-9}$			

c. Intersections avec les axes du repère

Avec l'axe des ordonnées : je calcule l'image de zéro, s'il y a un point d'intersection avec l'axe des ordonnées, il aura pour coordonnées : $(0\,;f(0))$.

Avec l'axe des abscisses : il s'agit des zéros de la fonction. S'il y en a, ils ont pour coordonnées $(x_0\,;0)$ où x_0 est la solution (ou une des solutions) de l'équation $f(x) = 0$. (en fait, je cherche les antécédents de 0 par f).

	Intersection avec l'axe des abscisses	Intersection avec l'axe des ordonnées
$f(x) = -2 + \dfrac{3}{x+4}$	$f(x) = 0$ $-2 + \frac{3}{x+4} = 0$ $\frac{3}{x+4} = 2$ puis $\frac{3\times(x+4)}{x+4} = 2\times(x+4)$ $3 = 2(x+4)$ $3 = 2x+8$ $-5 = 2x$ $x = -\dfrac{5}{2}$ Le point d'intersection est : $\left(-\frac{5}{2};0\right)$	$f(0) = -2 + \dfrac{3}{0+4} = -2 + \dfrac{3}{4} = -\dfrac{5}{4}$ Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées est $\left(0;-\frac{5}{4}\right)$.
$g(x) = 3 - \dfrac{1}{x-2}$		
$h(x) = \dfrac{2x+10}{-0{,}5x+3}$		
$j(x) = \dfrac{-x+1}{-3x-9}$		

d. Tableau de signes

Les règles de préparation du tableau de signe sont les mêmes que pour l'étude graphique :

!! Je dois connaitre le zéro et la valeur interdite de la fonction.

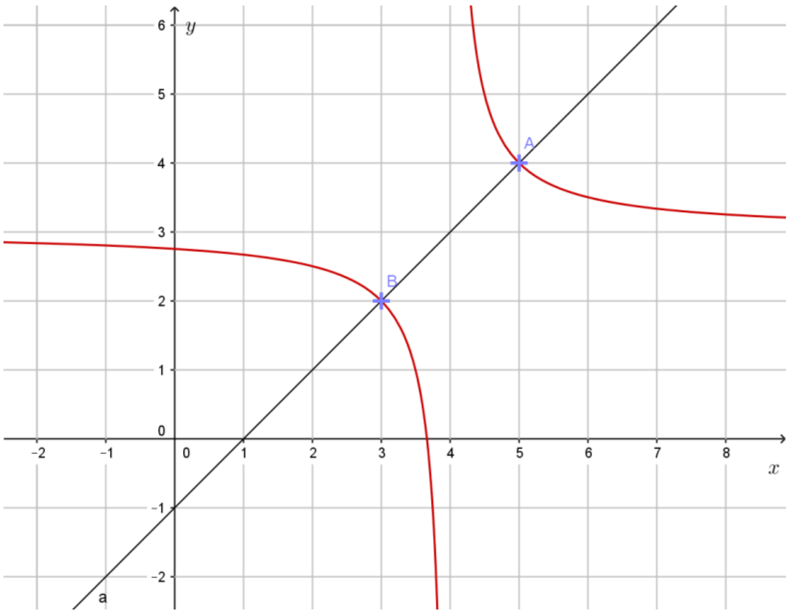
Fonction $f(x) = -2 + \frac{3}{x+4}$: zéro : $x = -\frac{5}{2}$ et valeur interdite : $x \neq -4$

$$f(x) = \frac{-2(x+4)}{x+4} + \frac{3}{x+4} = \frac{-2x-8}{x+4} + \frac{3}{x+4} = \frac{-2x-5}{x+4}$$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x-5$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

4°) étude de l'intersection entre une hyperbole et une droite.

Exemple : avec les fonctions $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x-4} + 3 = \frac{3x-11}{x-4}$



Méthode : les abscisses des éventuels points d'intersection sont, s'il y en a, les solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

Ne pas oublier de calculer ensuite l'ordonnée des points, en utilisant, au choix, une des deux fonctions. La réponse finale sera : les points d'intersection sont $A(\,x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$.

Autre exemple : en faisant l'étude, on ne trouvera aucun point d'intersection avec la droite d'équation $y = -x + 6$ et on trouvera un unique point d'intersection avec la droite d'équation $y = -x + 5$.

Résolution :

$\frac{3x-11}{x-4}=x-1$

$3x-11=(x-1)(x-4)$

$3x-11=x^2-5x+4$

$0=x^2-8x+15$

$\Delta=(-8)^2-4\times 1\times 15=64-60=4>0$ donc il y a deux solutions

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$

$y_1=x_1-1=3-1=2$ *pour calculer l'ordonnée du point d'intersection j'utilise l'équation de droite.*

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2}{2}=5$

$y_2=x_2-1=5-1=4$

Conclusion : il y a deux points d'intersection : $(3;2)$ et $(5;4)$.