Chapitre 6 ANALYSE

TRIGONOMETRIE

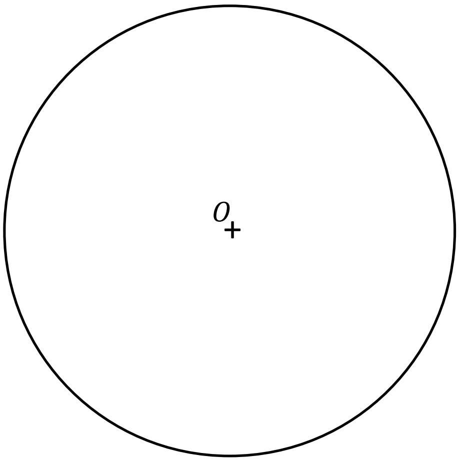
1°) Mesure des angles.

Activité de préparation :

- Je trace un cercle de rayon 3cm, de centre O.
- Je place A, B, C, D, E sur le cercle tels que :

  $\widehat{AOB} = 90$; $\widehat{BOC} = 30°$; $\widehat{COD} = 45°$; $\widehat{DOE} = 60°$.

- Je calcule, en cm, la mesure de chacun des arcs de cercles que forment les points.



On peut calculer le périmètre du cercle : $2 \cdot \pi \cdot R = 6\pi$ ≈18,8cm.

On a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre et la mesure de l'arc de cercle.
On peut donc construire un tableau de proportionnalité :

		$\widehat{AOB}$	$\widehat{BOC}$	$\widehat{COD}$	$\widehat{DOE}$	$\widehat{EOA}$
Angle au centre	$360°$	$90°$	$30°$	$45°$	$60°$	$135°$
Mesure de l'arc	6π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{9\pi}{4}$
		$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{BC}$	$\overset{\frown}{CD}$	$\overset{\frown}{DE}$	$\overset{\frown}{EA}$

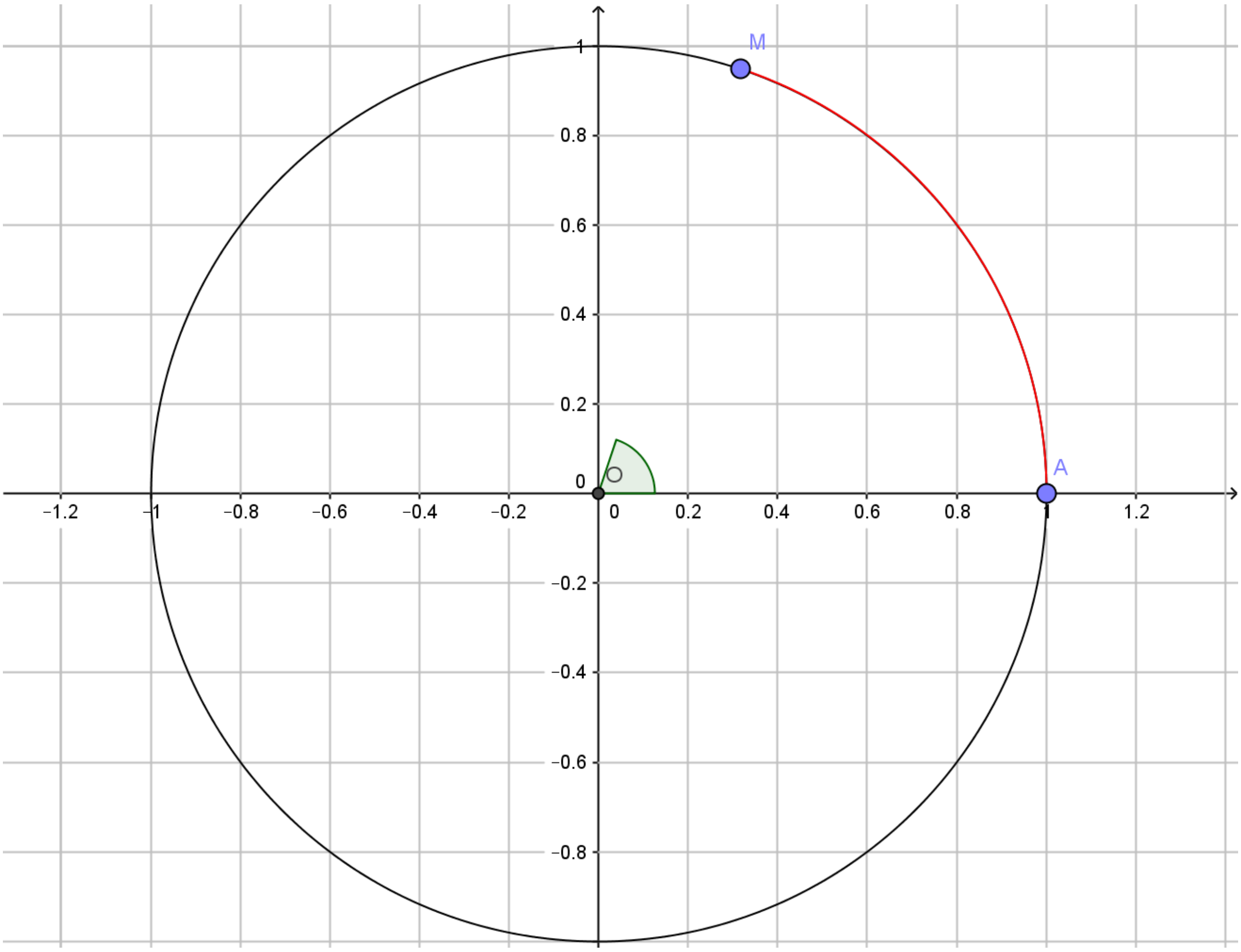
Définitions :

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre O origine du repère et de rayon 1 est appelé : cercle trigonométrique.

Si on appelle A le point de coordonnées $(1;0)$ et $M(x_M;y_M)$ est un point du cercle, alors on a un angle au centre $\widehat{AOM}$.

Sur un cercle trigonométrique, on dit que le sens opposé au sens horaire s'appelle le sens trigonométrique.

On lit toujours la valeur des angles dans le sens trigonométrique.



On dit que la mesure de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ en radians.

Définition : on peut calculer, pour tout angle géométrique dont la mesure est connue en degrés, une mesure de l'angle en radians. Cette mesure correspond à la longueur de l'arc de cercle intercepté, sur le cercle trigonométrique, par l'angle au centre dont la mesure est donnée.

Certaines valeurs sont à connaître par cœur :

Angle en degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Angle en radian											

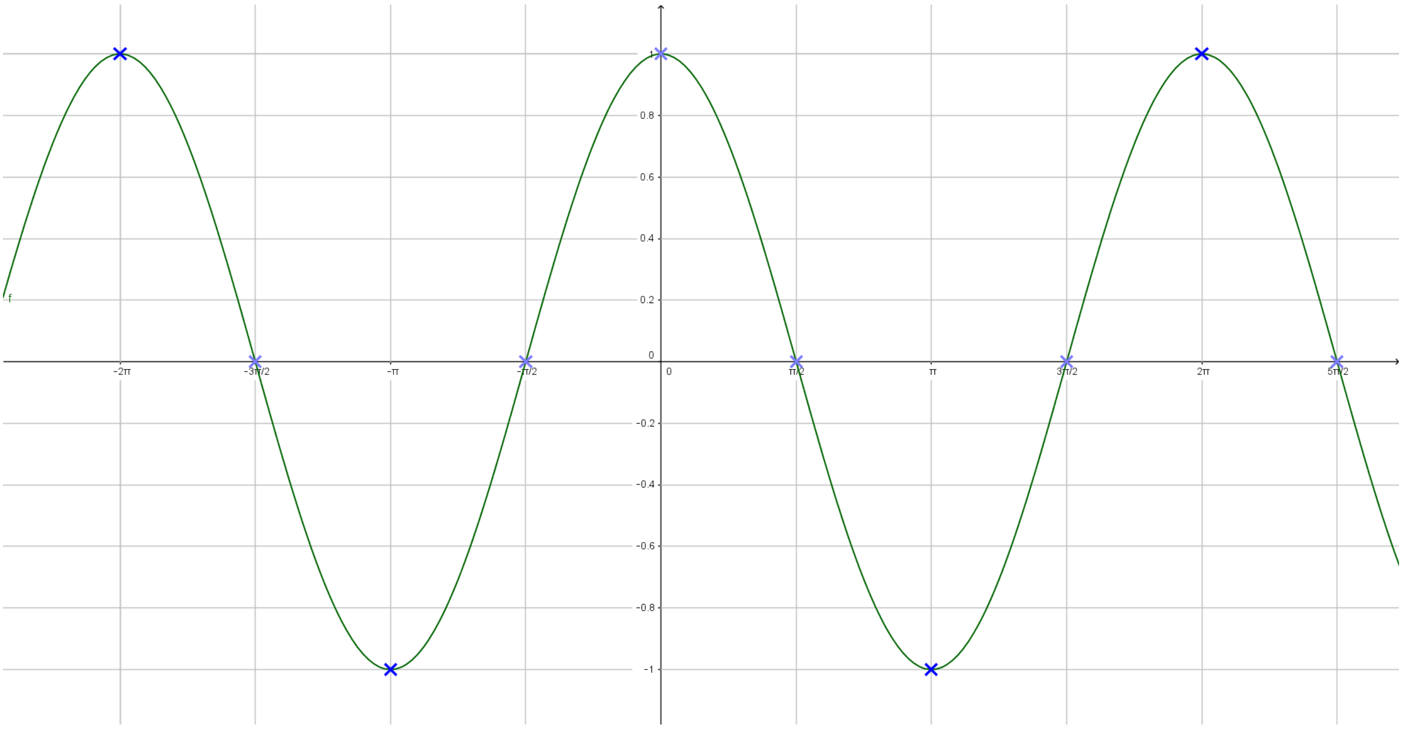
2°) Fonction sinus, fonction cosinus.

On travaille sur le cercle trigonométrique. $M(x_M\,;y_M)$ est un point du cercle, O est l'origine du repère, $I(1;0)$.

L'angle $\widehat{IMO} = \theta$.

Alors les coordonnées du point M sont le cosinus et le sinus de l'angle θ.

On a vu que l'on peut déplacer infiniment le point M sur le cercle, dans le sens positif et dans le sens négatif. On a remarqué plusieurs valeurs remarquables.



La fonction $f\,:\theta\ \longmapsto \cos(\theta)$ est définie sur $\mathbb{R}$, cela veut dire qu'elle existe pour n'importe quelle valeur de θ.

On aura toujours : $-1 \leq \theta \leq 1$.

La courbe obtenue s'appelle une sinusoïde. Elle est utilisée en science pour la description de nombreux phénomènes.

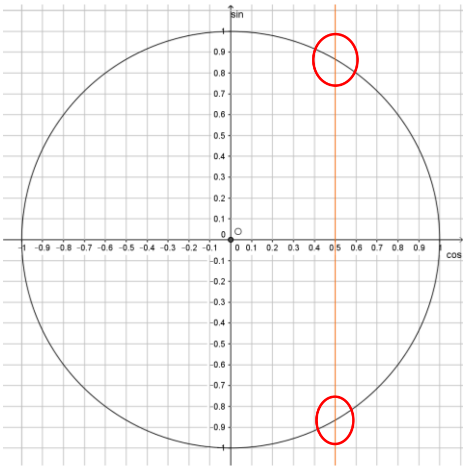
La courbe se répète infiniment : on dit qu'elle est <u>périodique</u>. Le temps dont la courbe a besoin pour se répéter s'appelle la période, la fonction cosinus a une période de 2π.

3°) Equations trigonométriques.

Activité : résous $\cos x = \frac{1}{2}$.

On a vu précédemment que : $x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$. (chapitre : triangles rectangles)

Sur le cercle trigonométrique, on observe deux solutions à l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$



Les deux solutions de l'équation sont :
$x = \frac{\pi}{3}$ radians et $x = -\frac{\pi}{3}$ radians.

On aurait aussi pu dire que les deux solutions sont :
$x = \frac{\pi}{3}$ rad et $x = \frac{5\pi}{3}$ rad.

Dans le premier cas, on dit qu'on donne les solutions sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Dans le deuxième cas, on donne les solutions sur $[0\ ; 2\pi]$

Pour résoudre les équations il faut se souvenir des valeurs remarquables.

θ en rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Exercice – exemple :

a) résous dans $[0\ ; 2\pi]$ puis dans $[-\pi\ ; \pi]$ l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dans $[0\ ; 2\pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$; dans $[-\pi\ ; \pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$

b) résous dans $[0\ ; 2\pi]$ puis dans $[-\pi\ ; \pi]$ l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans $[0\ ; 2\pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; dans $[-\pi\ ; \pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$

c) résous dans $[0\ ; 2\pi]$ puis dans $[-\pi\ ; \pi]$ l'équation : $\cos x = 0$

Dans $[0\ ; 2\pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; dans $[-\pi\ ; \pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$