Chapitre 3

EQUATIONS DU SECOND DEGRE.

1°) Définitions.

Une équation du deuxième degré est de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On a une inconnue (x) qui peut être de degré 1 et de degré 2 (la puissance).

Remarque : nous savons déjà résoudre plusieurs équations de degré 2

- Equations de type $x^2 = A$

Exemples :

$x^2 = 9$ Il y a 2 solutions : 3 et -3	$x^2 = -15$ Il n'y a pas de solution.	$x^2 = 0$ Une unique solution $x = 0$

- Equation produit nul

Rappel : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemples :

$(2x - 3)(5x + 8) = 0$
$2x - 3 = 0$ ou $5x + 8 = 0$
$x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{8}{5}$

- Equations identités remarquables

Rappel :

$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$; $\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$; $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Exemples :

$49x^2 + 42x + 9 = 0$ $(7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 3 + 3^2 = 0$ $(7x + 3)^2 = 0$ Donc $7x + 3 = 0$ D'où $x = -\frac{3}{7}$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$ $(2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 0$ $(2x - 1)^2 = 0$ Donc $2x - 1 = 0$ D'où $x = \frac{1}{2}$	$x^2 - 9 = 0$ $(x - 3)(x + 3) = 0$ $x = 3$ ou $x = -3$

2°) Formules.

Pour calculer les différentes formules, il faut partir de la forme développée $ax^2 + bx + c = 0$.

On appelle discriminant, et on note Δ, le nombre $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

On doit aussi savoir calculer $\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}$ et $\boxed{\beta = -\frac{\Delta}{4a}}$

Une équation du second degré peut s'exprimer sous trois formes différentes

La forme développée est : $ax^2 + bx + c = 0$.

La forme canonique est : $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$.

La forme factorisée (on y revient plus tard).

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

Exercice 8 : écrire la forme canonique des équations a, b, c.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = 2$

$\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4\times 1} = -1$

La forme canonique est : $a(x - \alpha)^2 + \beta = 1(x - 2)^2 - 1$

On peut vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur avec la calculatrice en faisant, dans une page calcul : $\mathbf{expand}(1(x - 2)^2 - 1)$.

Formes canoniques des équations suivantes de l'exercice 8 :

b) $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 0$

c) $-2x^2 - 3x + 5 = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{4}$

d) $7x^2 + 2x + 4 = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{27}{7}$

e) $7x^2 + 3x = 7\left(x + \frac{3}{14}\right)^2 - \frac{9}{28}$

f) $-3x^2 + 9 = -3(x - 0)^2 + 9$

3°) Résolution d'une équation du second degré.

Résoudre une équation du second degré, c'est trouver toutes les solutions.

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions appelées racines de l'équation

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas l'équation est factorisable, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution appelée racine de l'équation

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas l'équation est factorisable, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution

Dans ce cas l'équation n'est pas factorisable.

Tableau de synthèse : **les équations du second degré**.

Forme développée	Forme canonique	Forme factorisée
$ax^2 + bx + c = 0$	$a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$	$a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ si $\Delta > 0$ $a(x-x_0)^2 = 0$ si $\Delta = 0$ n'existe pas si $\Delta < 0$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}\ ;\ \beta = -\frac{\Delta}{4a}\ ;\ \Delta = b^2 - 4ac\ ;\ x_0 = -\frac{b}{2a}\ ;\ x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Résolution de l'équation :
Si $\Delta > 0$ on a deux solutions x_1 et x_2
Si $\Delta = 0$ on a une solution x_0
Si $\Delta < 0$ on n'a aucune solution

Ce que je dois savoir faire :

- ☐ Lire les coefficients a, b, c et savoir calculer les différentes formules
- ☐ Passer de la forme canonique à la forme développée, et vice versa
- ☐ Passer de la forme factorisée à la forme développée, et vice versa
- ☐ Résoudre une équation du second degré

Exercice 8 : je résous les équations du second degré et je donne la forme factorisée de l'équation

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

L'équation a pour solutions : 1 et 3.

La forme factorisée est : $x^2 - 4x + 3 = 1(x - 1)(x - 3)$.

On peut vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur avec la calculatrice en faisant, dans une page calcul : **factor**$(x^2 - 4x + 3)$ pour la forme factorisée, ou **solve**$(x^2 - 4x + 3 = 0, x)$ pour résoudre l'équation.

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$

donc il y a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

La forme factorisée est : $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

d) $7x^2 + 2x + 4 = 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 7 \times 4 = 4 - 56 = -52 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution.

Il n'est pas possible de factoriser $7x^2 + 2x + 4$.