EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

1°) Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.

Une équation du premier degré à une inconnue peut s'écrire sous la forme : $ax + b = 0$, où x représente l'inconnue.
Résoudre une équation signifie trouver toutes les solutions possibles de l'équation.

☺ Une bonne maitrise du calcul numérique et algébrique est importante pour résoudre correctement une équation ☺

Quelques exemples :

$$
\begin{aligned}
5x + 2 &= 9x - 14 \\
5x - 9x &= -14 - 2 \\
-4x &= -16 \\
x &= \frac{-16}{-4} = 4
\end{aligned}
$$

La solution est 4.

$$
\begin{aligned}
2(x-4) - 5(2x+3) &= 3(2x-5) \\
2x - 8 - 10x - 15 &= 6x - 15 \\
2x - 10x - 8 &= 6x \\
-8x - 6x &= 8 \\
-14x &= 8 \\
x &= \frac{8}{-14} = -\frac{4}{7}
\end{aligned}
$$

La solution est $-\frac{4}{7}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-3}{6} - \frac{3x-1}{6} &= \frac{x+2}{3} + 2 \\
\frac{2x-3}{6} - \frac{3x-1}{6} &= \frac{2(x+2)}{2 \times 3} + \frac{6 \times 2}{6 \times 1} \\
\frac{2x - 3 - (3x-1)}{6} &= \frac{2x + 4 + 12}{6} \\
2x - 3 - 3x + 1 &= 2x + 16 \\
-3x - 2 &= 16 \\
-x &= 16 + 2 \\
-x &= 18 \\
x &= -18
\end{aligned}
$$

La solution est -18.

Cas où on utilise le produit en croix :

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+3}{2} &= \frac{5x-4}{3} \\
3(2x+3) &= 2(5x-4) \\
6x + 9 &= 10x - 8 \\
6x - 10x &= -8 - 9 \\
-4x &= -17 \\
x &= \frac{-17}{-4} = \frac{17}{4}
\end{aligned}
$$

La solution est $\frac{17}{4}$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} &= \frac{x}{2} + 3 \\
\frac{2 \times 2x}{2 \times 3} - \frac{1}{6} &= \frac{3 \times x}{3 \times 2} + \frac{3 \times 6}{1 \times 6} \\
\frac{4x-1}{6} &= \frac{3x+18}{6} \\
4x - 1 &= 3x + 18 \\
4x - 3x &= 18 + 1 \\
x &= 19
\end{aligned}
$$

La solution est 19.

$$
\begin{aligned}
4x(x+6) - 2 &= (2x-5)^2 \\
4x^2 + 24x - 2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 \\
4x^2 + 24x - 2 &= 4x^2 - 20x + 25 \\
24x + 20x &= 25 + 2 \\
44x &= 27 \\
x &= \frac{27}{44}
\end{aligned}
$$

La solution est $\frac{27}{44}$.

Cas particuliers :

$$
\begin{aligned}
-5(2x-4) + 2 &= 2(-5x+3) \\
-10x + 20 + 2 &= -10x + 6 \\
22 &= 6 \text{ c'est FAUX}
\end{aligned}
$$

L'équation est impossible, elle n'a pas de solution

$$
\begin{aligned}
7(-3x+2) + 1 &= -(15x+15) - (6x-30) \\
-21x + 14 + 1 &= -15x - 15 - 6x + 30 \\
-21x + 14 + 1 &= -21x + 15 \\
-21x + 15 &= -21x + 15 \\
0 &= 0 \text{ c'est VRAI}
\end{aligned}
$$

L'équation est toujours vraie, elle a une infinité de solutions.

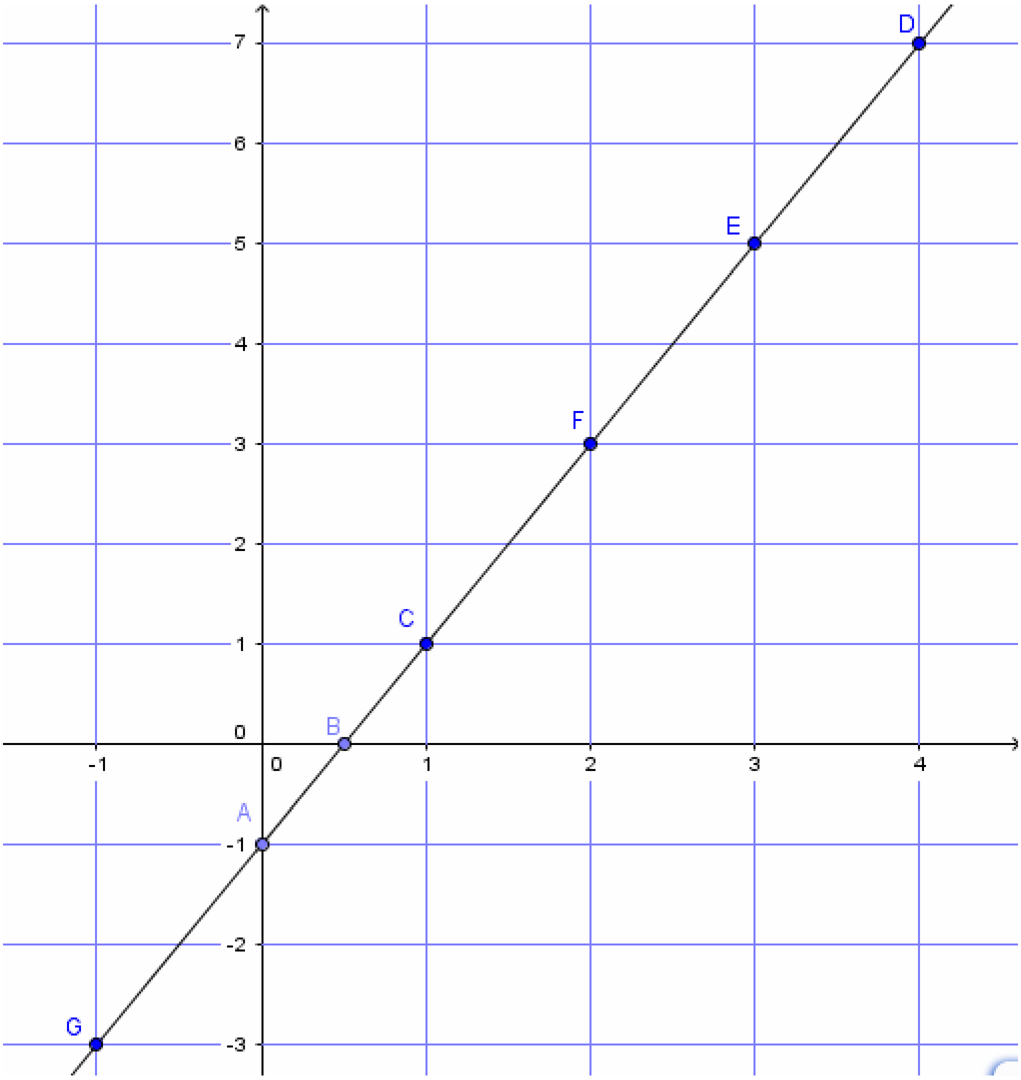
2°) Equation du premier degré à deux inconnues.

Considérons l'équation suivante : $-2x + y = -1$ et cherchons des solutions, c'est-à-dire des couples de nombres $(x; y)$ qui rendent l'égalité vraie.

- Avec $x = 0$ et $y = -1$ j'ai : $-2 \times 0 - 1 = -1$ VRAI donc $(0; -1)$ est un couple solution.
- Avec $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$ j'ai $-2 \times \frac{1}{2} + 0 = -1$ VRAI donc $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est un couple solution.
- Avec $x = -5$ et $y = 3$ j'ai $-2 \times (-5) + 3 = -1$ FAUX donc $(-5; 3)$ n'est pas un couple solution.
- Avec $x = 1$ et $y = 1$ j'ai $-2 \times 1 + 1 = -1$ VRAI donc $(1; 1)$ est un couple solution

D'autres couples solutions sont : (5 ; 9), (4 ; 7), (3 ; 5), (2 ; 3), (-1 ;-3), …

Plaçons les couples solutions dans un repère.



On observe que tous les couples solutions forment des points alignés dans le repère.

On dit que $-2x + y = -1$ est une équation de droite. Cette équation a une infinité de solutions, qui sont tous les points de la droite.

$-2x + y = -1$ s'écrit aussi $y = 2x - 1$

Ce sont deux façons d'écrire l'équation de la même droite.

$-2x + y = -1$ est l'équation cartésienne

$y = 2x - 1$ est l'équation réduite

Pour t'entrainer :

Donne l'équation réduite des droites suivantes :

a) $3x - y = 5$ $\qquad -y = -3x + 5$ donc $\boxed{y = 3x - 5}$

b) $4x + 2y = -10$ $\qquad \frac{2y}{2} = \frac{-4x-10}{2}$ donc $\boxed{y = -2x - 5}$

c) $-3x + 5y = -15$ $\qquad \frac{5y}{5} = \frac{3x-15}{5}$ donc $\boxed{y = \frac{3}{5}x - 3}$

d) $-8x - 4y = 10$ $\qquad \frac{-4y}{-4} = \frac{8x+10}{-4}$ donc $\boxed{y = -2x - \frac{5}{2}}$

Donne deux équations cartésiennes de chacune des droites suivantes :

a) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$ $\qquad \boxed{\frac{3}{5}x + y = \frac{2}{5}}$ ou $\boxed{3x + 5y = 2}$ ou $\boxed{30x + 50y = 20}$

b) $y = 0{,}5x - 4{,}5$ $\qquad \boxed{-5x + 10y = -45}$ ou $\boxed{x - 2y = 9}$

c) $y = -3x + 2$ $\qquad \boxed{3x + y = 2}$ ou $\boxed{6x + 2y = 4}$

d) $y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$ $\qquad \boxed{-5x + 4y = \frac{8}{3}}$ ou $\boxed{-15x + 12y = 8}$

Remarque : **pour une même droite il n'existe qu'une seule équation réduite, mais il existe plusieurs équations cartésiennes.**

$$ax + by = c \text{ ou } y = mx + p$$

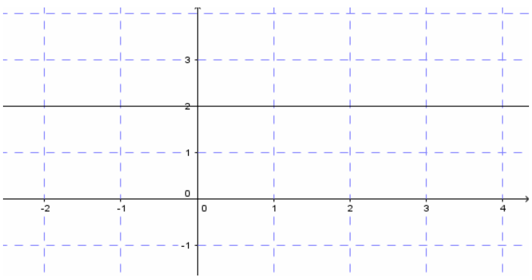
Dans l'équation réduite $y = mx + p$ j'ai :
p l'ordonnée à l'origine et m le coefficient directeur.

Toutes les droites sont caractérisées par des équations du premier degré à deux inconnues.
Cas particuliers :

- Les droites horizontales

Leur équation est de la forme $y = k$

Exemple : droite $y = 2$

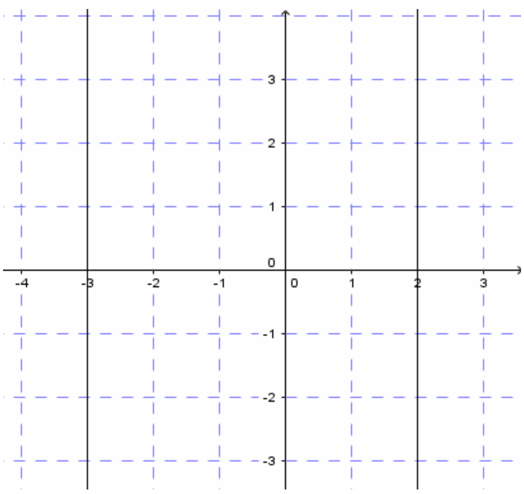


- Les droites verticales

Leur équation est de la forme $x = k$

Exemple ci-contre :

$x = -3$ et $x = 2$



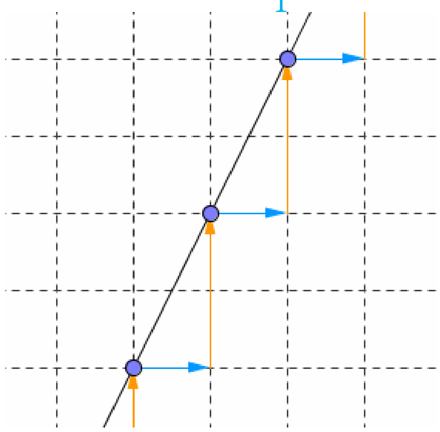
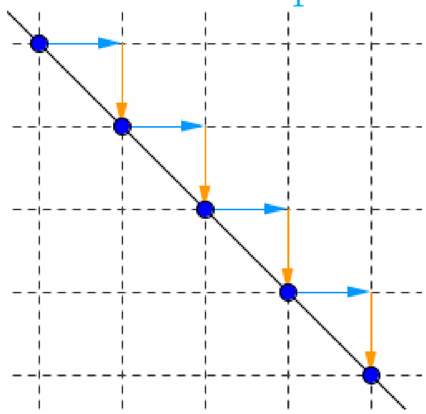
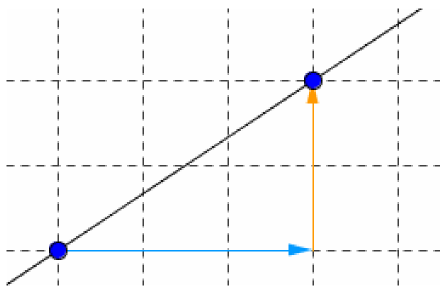
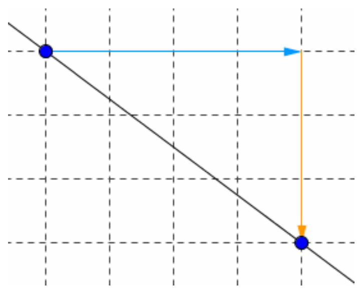
Comment tracer une droite

Méthode 1 : utilisation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

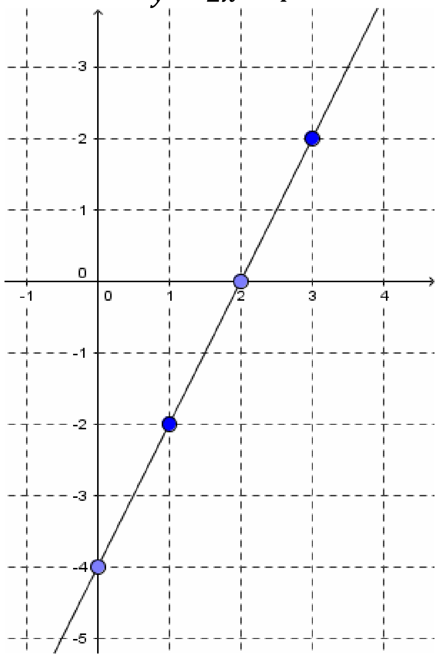
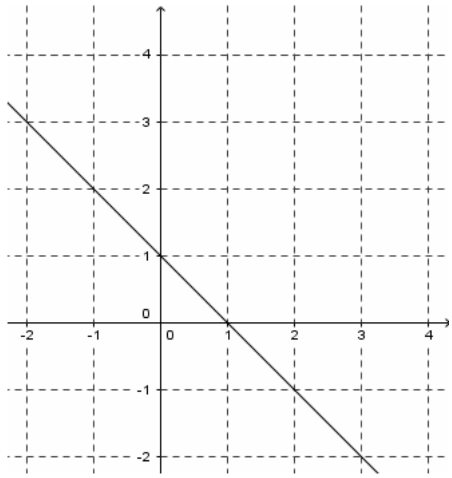
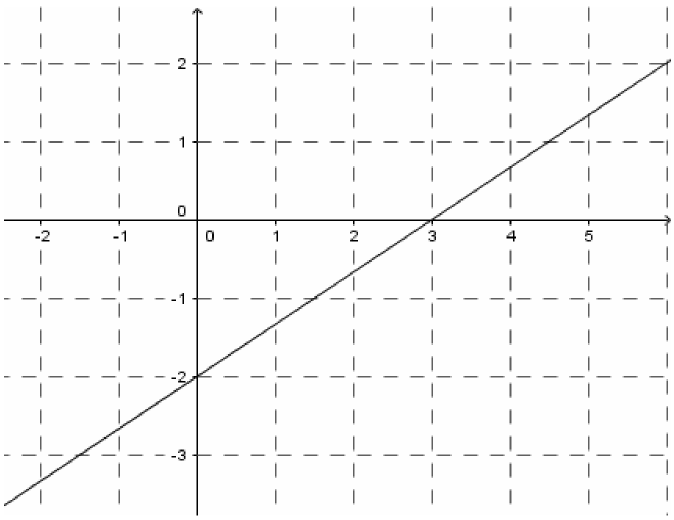
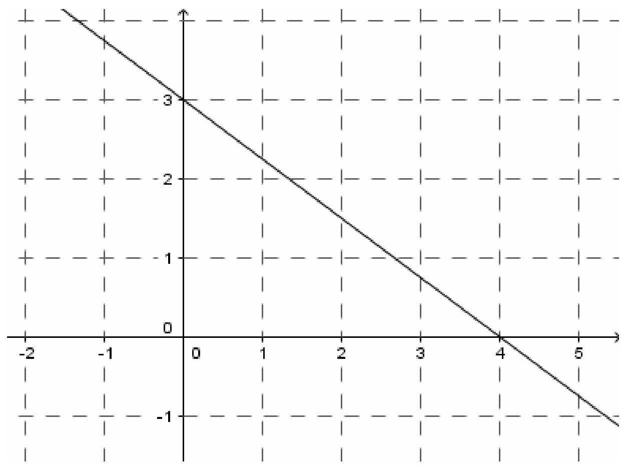
$a : y = 2x - 4$	coefficient directeur $m = 2$	ordonnée à l'origine $p = -4$
$b : y = -x + 1$	coefficient directeur $m = -1$	ordonnée à l'origine $p = 1$
$c : y = \frac{2}{3}x - 2$	coefficient directeur $m = \frac{2}{3}$	ordonnée à l'origine $p = -2$
$d : y = -\frac{3}{4}x + 3$	coefficient directeur $m = -\frac{3}{4}$	ordonnée à l'origine $p = 3$

Le coefficient directeur est une information sur la pente de la droite.

Il faut retenir : $\boxed{m = \frac{\textit{déplacement sur l'axe des ordonnées}}{\textit{déplacement sur l'axe des abscisses}}}$

$m < 0$ Coefficient directeur négatif Droite décroissante	$m > 0$ Coefficient directeur positif Droite croissante
$m = 2 = \frac{2}{1}$ 	$m = -1 = -\frac{1}{1}$ 
$m = \frac{2}{3}$ 	$m = -\frac{3}{4}$ 

Il ne manque qu'une chose : un point de départ pour tracer notre droite. C'est là qu'intervient l'ordonnée à l'origine.

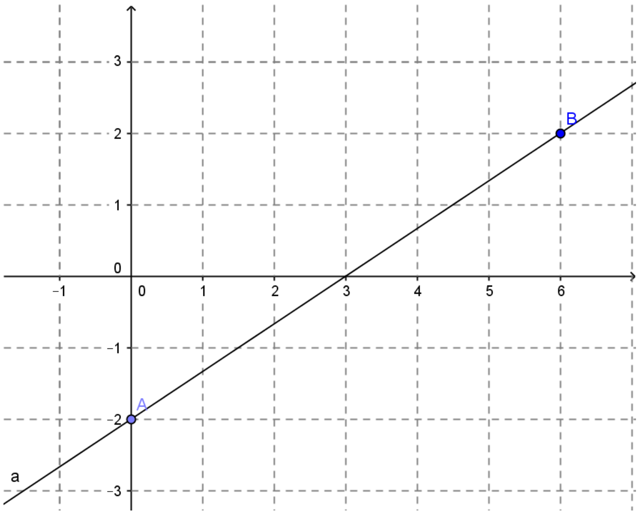
$y = 2x - 4$ 	$y = -x + 1$ 
$y = \dfrac{2}{3}x - 2$ 	$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$ 

Comment tracer une droite

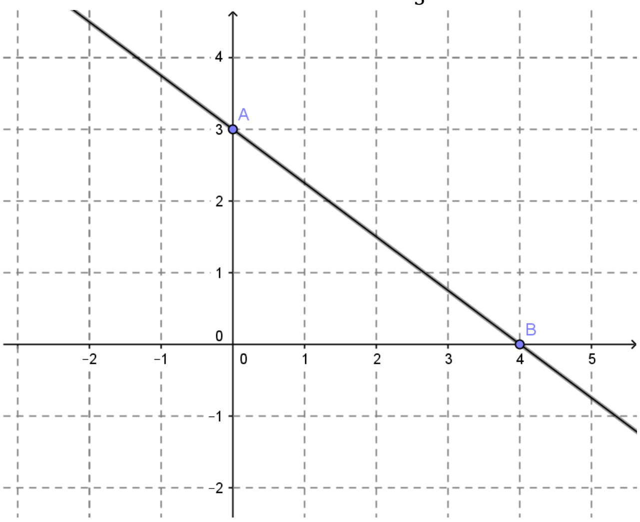
Méthode2: calcul des coordonnées de points.

On choisit une des deux coordonnées (au hasard, ou en essayant de trouver une valeur facile à calculer) puis on résout l'équation qui permet de retrouver la deuxième coordonnée ;
On procède ainsi au moins deux fois, puis on place les deux points trouvés dans un repère, de façon à pouvoir tracer la droite.
Cette méthode peut être utilisée aussi bien avec l'équation réduite qu'avec l'équation cartésienne.

Exemple 1 : $y = \frac{2}{3}x - 2$
Point A : si $x = 0$ alors $y = \frac{2}{3} \times 0 - 2 = -2$ donc $A(0; -2)$
Point B : si $x = 6$ alors $y = \frac{2}{3} \times 6 - 2 = 4 - 2 = 2$ donc $B(6; 2)$



Exemple 2 : $3x + 4y = 12$
Point A : si $x = 0$ alors $3 \times 0 + 4y = 12$ donc $4y = 12$ donc $y = \frac{12}{4} = 3$ donc $A(0; 3)$
Point B : si $y = 0$ alors $3x + 4 \times 0 = 12$ donc $3x = 12$ donc $x = \frac{12}{3} = 4$ donc $B(4; 0)$



Comment retrouver l'équation de la droite à partir du graphique.

Méthode 1 : utilisation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

Cette méthode est une méthode graphique, on ne peut l'utiliser que lorsque la droite passe par les nœuds du quadrillage.

déplacement vertical

On écrit : $y = \quad -x \pm p$ ordonnée à l'origine

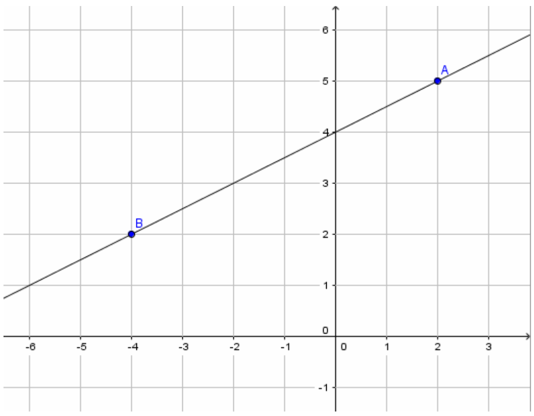
déplacement horizontal

On met un $-$ si la droite est décroissante

Méthode 2 : on calcule.

Pour cela il faut connaitre les coordonnées de deux points appartenant à la droite.

Exemple : droite (AB) avec $A(2\,;5)$ et $B(-4\,;2)$



On sait que l'on aura : $y = mx + p$

Etape 1 : calcul du coefficient directeur.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{déplacement\ des\ ordonnées}{déplacement\ des\ abscisses}$$

Donc ici on a $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-2}{2-(-4)} = \frac{3}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

On a donc : $y = \frac{1}{2}x + p$, il faut maintenant trouver p.

Etape 2 : calcul de l'ordonnée à l'origine.

$y_A = \frac{1}{2}x_A + p$ donne $5 = \frac{1}{2} \times 2 + p$ donc $5 = 1 + p$

On a donc $p = 4$

L'équation de la droite est : $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Remarque : pour l'étape 2 on pouvait aussi choisir le point B, on aurait trouvé pareil.

Comment calculer les coordonnées du point d'intersection entre deux droites.

Exemple : calcule les coordonnées du point I d'intersection entre les droites $3x + 4y = 2$ et $y = 2x - 5$.

Méthode :

- J'exprime les deux équations de droite sous forme réduite

$3x + 4y = 2$ donne $4y = -3x + 2$ et donc $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

$y = 2x - 5$ est déjà sous forme réduite

- J'écris et je résous $y = y$ pour trouver l'abscisse x du point d'intersection

$y = y$ donne $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 2x - 5$ donc $-\frac{3}{4}x - 2x = -\frac{1}{2} - 5$, je multiplie tout par 4 pour ne plus avoir de fractions, je trouve $-3x - 8x = -2 - 20$ donc $-11x = -22$ d'où $x = 2$

- Je choisis une des deux équations de droites et je calcule y l'ordonnée du point d'intersection

$y = 2x - 5 = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$

- Je conclus

Le point d'intersection entre les deux droites est $I(2; -1)$.

L'essentiel à retenir :

- ✓ Une équation du premier degré à deux inconnues est une équation de droite et a une infinité de solutions.
- ✓ Le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses s'appelle : zéro de la droite.
- ✓ Le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées s'appelle : ordonnée à l'origine.
- ✓ Le coefficient directeur de la droite donne une information sur la pente de la droite.
  - Si le coefficient directeur est positif, la droite est croissante
  - Si le coefficient directeur est négatif, la droite est décroissante
  - Si le coefficient directeur est nul, la droite est horizontale
  - Une droite verticale n'a pas de coefficient directeur
  - Plus le coefficient directeur a une valeur proche de zéro, plus la pente est douce
  - Plus le coefficient directeur a une valeur loin de zéro, plus la pente est forte

Je sais :

- ✓ Tracer une droite connaissant son équation réduite ou cartésienne
- ✓ Transformer une équation réduite en équation cartésienne, et vise versa
- ✓ Retrouver l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique
- ✓ Retrouver l'équation d'une droite par calcul

3°) Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

a. Résolution d'un système par substitution.

$$(S)\begin{cases}2x+3y=-2\\-3x+y=-8\end{cases}$$

- **Je choisis une inconnue à isoler.** Dans l'idéal, il faut trouver une inconnue qui n'a pas de coefficient, pour éviter les longs calculs avec des fractions. Dans ce cas, je vais choisir d'isoler y dans la deuxième équation :

$-3x+y=-8$ donne $y=3x-8$

- A présent, **je vais remplacer l'inconnue isolée** (ici, le y) **dans l'autre équation** :

$2x+3y=-2$ donne $2x+3(3x-8)=-2$ donc $2x+9x-24=-2$ et $11x=22$ d'où $x=2$

- Pour **calculer la deuxième inconnue**, j'utilise la formule que j'ai calculée pour isoler y :

$y=3x-8=3\times2-8=6-8=-2$

- **Je vérifie** que mes solutions soient correctes :

$-3x+y=-3\times2+(-2)=-6-2=-8$ VRAI

$2x+3y=2\times2+3\times(-2)=4-6=-2$ VRAI

- **Je conclus** :

Le couple solution est $(2;-2)$

b. Résolution d'un système par combinaison linéaire

$$(S)\begin{cases}2x+3y=-2\\-3x+y=-8\end{cases}$$

Je choisis une inconnue que je vais supprimer : ici, x.

Pour cela, je dois faire apparaitre devant le x des nombres égaux et opposés.

$$(S)\begin{cases}2x+3y=-2 & \times 3\\-3x+y=-8 & \times 2\end{cases}$$

$$(S)\begin{cases}6x+9y=-6\\-6x+2y=-16\end{cases}$$

$$0x+11y=-22$$ j'ai fait une somme

Il reste $11y=-22$ donc $y=-\frac{22}{11}=-2$

Pour calculer le deuxième, je choisis une équation du départ

$-3x+y=-8$ devient $-3x+(-2)=-8$ donc $-3x=-8+2=-6$ donc $x=\frac{-6}{-3}=2$

Je vérifie :

$-3x+y=-3\times2+(-2)=-6-2=-8$ VRAI

$2x+3y=2\times2+3\times(-2)=4-6=-2$ VRAI

Le couple solution est $(2;-2)$

c. Résolution d'un système par représentation graphique

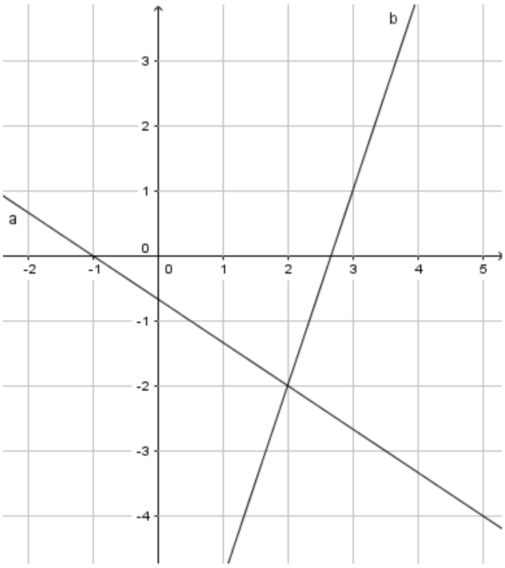
$$(S)\begin{cases}2x+3y=-2\\-3x+y=-8\end{cases}$$

Chacune de deux équations du système représente une équation de droite.

$a:\ 2x+3y=-2$ donne $y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

$b:\ -3x+y=-8$ donne $y=3x-8$

Traçons les deux droites dans un repère :



On observe que les solutions du système sont les coordonnées du point d'intersection entre les deux droites : $(2;-2)$.

Le problème de la méthode graphique est qu'elle n'est pas précise : on ne trouve pas toujours des solutions à coordonnées entières. Pour cette raison, on n'utilise cette méthode que rarement, ou pour vérifier qu'une solution soit correcte.

d. Résolution d'un système sur la calculatrice

Dans une page calcul, faire Menu, 3 : Algèbre, 7 : Résolution d'un système, 1 : Système, OK, puis compléter le système.