B Probabilités

1 Notion de probabilité

Se souvenir

Ce que veut dire : « la probabilité d'obtenir PILE en lançant une pièce non truquée est $\frac{1}{2}$ » ;
à savoir : si on lance une pièce non truquée, on a 1 chance sur 2 qu'elle tombe sur PILE.

Ce que veut dire : « la probabilité d'obtenir un DEUX en lançant un dé non truqué est $\frac{1}{6}$ » ;
à savoir : si on lance un dé non truqué, on a 1 chance sur 6 qu'il tombe sur un DEUX.

3 Notion de probabilité

A Activités

❶ Introduction

En physique, en chimie, en biologie ou dans d'autres domaines, lorsque l'on réalise une expérience connue dans des conditions bien précises, en général, on sait par avance le résultat que l'on va obtenir : si l'on suspend une masse connue à un ressort connu, on peut prévoir l'allongement de ce ressort ; si l'on verse de l'acide sur du calcaire, on obtient une effervescence … etc.

On dit que ces expériences sont **déterministes**.

Mais, dans certains cas, même si l'on connaît parfaitement les éléments de l'expérience, on ne peut néanmoins pas en prévoir le résultat : si on lance en l'air une pièce de monnaie parfaitement connue, on ne sait pas si elle va tomber sur pile ou sur face ; si on fait rouler sur la table un dé parfaitement connu et équilibré, on ne peut savoir sur quel numéro il va s'arrêter … etc.

On parle alors d'expériences **aléatoires**.

Dans ce cas nous pourrons quand même prévoir quels sont les **résultats possibles** (Pile ou Face pour la pièce, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pour le dé), et essayer de prévoir quelle « **chance** » (ou risque) on a que ce soit un résultat plutôt qu'un autre qui se produise.

Voyons sur deux activités comment on peut procéder, puis nous passerons au cours pour formaliser et approfondir.

❷ Un dé classique, parfaitement équilibré

On s'apprête à lancer un dé classique, cubique, parfaitement équilibré, où les six faces sont numérotées de 1 à 6.

❶ Quels résultats peut-on avoir de ce lancer ?
❷ Peut-on prévoir avec quelle « chance » chacun d'entre eux pourrait arriver ?

Réponses

❶ Bien entendu, les résultats possibles de ce lancer sont les numéros 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

On pourrait aussi imaginer comme résultat le fait que le dé s'arrête en équilibre sur une de ses arêtes : on dit alors qu'il est « cassé ».

Pour simplifier l'exemple, nous supposerons qu'il est rigoureusement impossible que le dé s'arrête autrement que sur l'une de ses faces.

Nous n'avons donc que six résultats possibles : n°1, n°2, n°3, n°4, n°5 ou n°6.

Commentaire Dans cet exemple, le fait de lancer le dé est une **expérience aléatoire** (puisque son résultat n'est pas prévisible) qui n'a pas encore eu lieu.

Les résultats possibles (n°1, n°2, n°3, n°4, n°5 ou n°6) sont appelés les **événements élémentaires** de cette expérience ou **issues**.

2 Puisque le dé est parfaitement équilibré et que l'on n'a aucun autre renseignement, on peut penser que chaque numéro a la même « chance » d'arriver.

Comme il y en a 6, on pourra dire qu'il y a 1 chance sur 6 que le dé tombe sur le n°1, qu'il y a 1 chance sur 6 que le dé tombe sur le n°2, … etc.

On pourrait aussi dire qu'il y a 10 chances sur 60 que le dé tombe sur le n°1, ou 5 chances sur 30.

L'idée, intuitive, est que les 6 numéros se répartiraient équitablement si l'on faisait 6 fois l'expérience, ou 60 fois, ou 30 fois … etc.

On va traduire ce « nombre de chances » par une fraction.

Le fait que le dé tombe sur le n°1 « risque » de se produire dans 1/6$^{\text{ème}}$ des cas, ou dans 10/60$^{\text{ème}}$ des cas, ce qui est compatible avec le fait que : $1/6 = 10/60 = 5/30$.

Le fait que le dé tombe sur le n°2 « risque » de se produire dans 1/6$^{\text{ème}}$ des cas, … etc.

Commentaire Ce nombre, qui évalue la « chance » (ou le risque) qu'un résultat (un **événement élémentaire**) se produise est appelé la **probabilité** de cet évènement.

On dira que la **probabilité** de l'**événement élémentaire** « n°1 » est $\frac{1}{6}$.

3 Un dé original, très déséquilibré

On s'apprête maintenant à lancer un dé beaucoup moins classique, tétraédrique (c'est à dire à quatre faces triangulaires) et très déséquilibré (on a particulièrement alourdi certains sommets du dé pour qu'il tombe plus souvent sur certains numéros).

Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4.

1 Quels résultats peut-on avoir de ce lancer ?

2 Peut-on prévoir avec quelle « chance » chacun d'entre eux pourrait arriver ?

Réponses

1 Bien entendu, les résultats possibles de ce lancer sont les numéros 1, 2, 3 ou 4.

On pourrait, là encore, imaginer comme résultat le fait que le dé s'arrête en équilibre sur une de ses arêtes, qu'il soit « cassé ».

Pour simplifier l'exemple, nous supposerons encore qu'il est rigoureusement impossible que le dé s'arrête autrement que sur l'une de ses faces.

Nous n'avons donc que quatre résultats possibles : n°1, n°2, n°3 ou n°4.

Commentaire Dans cet exemple, le fait de lancer le dé est une **expérience aléatoire** (puisque son résultat n'est pas prévisible) qui n'a pas encore eu lieu.

Les résultats possibles (n°1, n°2, n°3 ou n°4) sont les **événements élémentaires** de cette expérience ou **issues**.

❷ Puisque le dé n'est pas parfaitement équilibré, on n'a pas de raison de penser que chaque numéro a la même « chance » d'arriver.

N'ayant pas d'autre renseignement, on ne peut pas déterminer la « chance » d'arriver de chaque numéro.

Information complémentaire pour pouvoir répondre

On suppose maintenant que notre dé a été testé avant d'être vendu et que le test sur 5 000 lancers a donné les résultats suivants :

Issues	n°1	n°2	n°3	n°4
Nombre de fois où on l'a obtenue	495	505	1 010	2 990

Suite de la réponse

On peut donc supposer, vu le grand nombre de lancers effectués lors de ce test, que l'on « risque » d'obtenir, lorsqu'on lancera nous-mêmes le dé, les différents résultats avec la même « fréquence » que celle observée dans le tableau.

On peut ainsi dire qu'il y a 495 chances sur 5 000 que le dé tombe sur le n°1, 505 chances sur 5 000 que le dé tombe sur le n°2, 1 010 chances sur 5 000 que le dé tombe sur le n°3 et 2 990 chances sur 5 000 que le dé tombe sur le n°4.

L'idée, intuitive, est que les 4 numéros se répartiraient comme dans le tableau si l'on refaisait 5 000 fois l'expérience.

On va traduire ce « nombre de chances » par une fraction.

Le fait que le dé tombe sur le n°1 « risque » de se produire dans 495/5000 cas.

Le fait que le dé tombe sur le n°2 « risque » de se produire dans 505/5000 cas.

Le fait que le dé tombe sur le n°3 « risque » de se produire dans 1010/5000 cas.

Le fait que le dé tombe sur le n°4 « risque » de se produire dans 2990/5000 cas.

On dira que la probabilité de l'événement élémentaire « n°1 » est $\frac{495}{5000}$, celle de l'événement élémentaire « n°2 » est $\frac{505}{5000}$, celle de l'événement élémentaire « n°3 » est $\frac{1010}{5000}$, et celle de l'événement élémentaire « n°4 » est $\frac{2990}{5000}$.

Commentaire Cette idée intuitive que l'observation d'un grand nombre de cas permet de « deviner » la probabilité qu'un événement se produise est aussi sous-jacente dans le premier exemple (dé cubique bien équilibré).

Pour affirmer le fait que chaque événement élémentaire a une probabilité de $\frac{1}{6}$, on s'imagine ce qui se passerait si l'on lançait le dé un très grand nombre de fois (par exemple 6 000 fois) ; on aurait à peu près autant de fois chaque issue (ici environ 1 000 fois).

Car on sait très bien que si on lance ce dé 6 fois exactement, il y a très peu de chances que l'on obtienne exactement une fois chaque issue.

Cependant ces deux exemples sont assez différents dans leur façon d'obtenir les probabilités de chaque issue :

– pour le premier dé, équilibré, un raisonnement sur l'égalité des chances permet de conclure (même si on peut avoir en tête ce qui se passerait si l'on testait ce dé en le lançant un grand nombre de fois),

– pour le deuxième dé, déséquilibré, aucun raisonnement ne suffit pour déterminer les probabilités de chaque issue ; seul le tableau statistique du test permet de les déterminer.

Ce sont les deux principales façons de définir des probabilités :
– un raisonnement sur l'expérience aléatoire en question,
– une utilisation des fréquences obtenues dans un tableau statistique.

Remarque

Dans les deux exemples ci-dessus, nous pouvons remarquer deux choses :

– les probabilités calculées sous forme de fractions sont toujours des nombres inférieurs à 1 (on n'imagine pas qu'un résultat puisse avoir 7 chances sur 6 de se produire, donc une probabilité de $\frac{7}{6}$!)

– en ajoutant les probabilités de toutes les issues possibles, on obtient exactement 1,

pour le dé cubique, on a $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$;

pour l'autre dé, $\frac{495}{5000}+\frac{505}{5000}+\frac{1010}{5000}+\frac{2990}{5000}=1$.

B Cours

1 Le langage des probabilités

a) Expérience aléatoire, événements élémentaires, univers

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celle qui se produira.

Les **issues** sont aussi appelées les **événements élémentaires**, ou les **éventualités**.

Commentaire Il est important, avant de commencer un exercice de probabilité, d'avoir bien compris l'expérience aléatoire dont on parle, et ses résultats possibles (événements élémentaires).

Exemples ❶ On veut lancer un dé à quatre faces et s'intéresser au numéro obtenu.

Les événements élémentaires sont : n°1, n°2, n°3 et n°4.

❷ On veut lancer deux dés identiques à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus.

Les événements élémentaires sont :

(1 et 1), (1 et 2), (1 et 3), (1 et 4), (2 et 2), (2 et 3), (2 et 4), (3 et 3), (3 et 4) et (4 et 4), si l'on ne peut pas distinguer les deux dés (sinon, avec deux dés distincts, (1 et 2) et (2 et 1) sont des issues différentes).

❸ On veut lancer deux fois un dé à quatre faces et s'intéresser à la somme des deux numéros obtenus.

Les événements élémentaires sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Vocabulaire

On regroupe souvent toutes les **issues** d'une expérience aléatoire dans un même ensemble, que l'on appelle l'**univers** de l'expérience.

Exemples Dans l'exemple ❶ l'**univers** de l'expérience est : E = { n°1 ; n°2 ; n°3 ; n°4 }.

Dans l'exemple ❷ l'**univers** de l'expérience est :

E = { (1 et 1) ; (1 et 2) ; (1 et 3) ; (1 et 4) ; (2 et 2) ; (2 et 3) ; (2 et 4) ; (3 et 3) ; (3 et 4) ; (4 et 4) }.

Dans l'exemple ❸ décrire l'**univers** de l'expérience.

Remarque

Vous remarquerez que l'on note les ensembles avec des accolades, { et } , et que les issues sont séparées par des points-virgules.

b) Événements

Reprenons l'exemple ❷ précédent, où l'on veut lancer deux dés identiques à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus.

Au lieu de se demander si un résultat précis va se produire (aura-t-on le 1 et le 3 ?), on peut s'intéresser à une possibilité plus large : aura-t-on deux numéros impairs ?

Cela revient à se demander si l'on aura l'une des issues (1 et 1), ou (1 et 3), ou (3 et 3).

Et donc, si l'on aura l'une des issues de l'ensemble : {(1 et 1) ; (1 et 3) ; (3 et 3)}.

Cet ensemble est caractéristique du fait « d'avoir deux numéros impairs ».

On dit que c'est l'**événement « avoir deux numéros impairs »**.

On peut de la même façon définir d'autres **événements**, correspondant à différentes possibilités des issues : « avoir un double », « avoir deux numéros dont la somme fasse 4 », « avoir au moins un 1 », … etc.

Chaque **événement** pourra être représenté par **l'ensemble** de **toutes les issues** correspondantes :

{(1 et 1) ; (2 et 2) ; (3 et 3) ; (4 et 4)} est l'événement « avoir un double »,

{(1 et 3) ; (2 et 2)} est l'événement « avoir deux numéros dont la somme fasse 4 »,

{(1 et 1) ; (1 et 2) ; (1 et 3) ; (1 et 4)} est l'événement « avoir au moins un 1 ».

On dit que **ces issues** sont les **issues favorables** à l'événement (on devrait dire favorables à ce qu'il se réalise).

On peut aussi considérer qu'un **ensemble d'issues quelconques** représente un **événement**, même si l'on ne peut pas le décrire par une phrase :

{(1 et 1) ; (2 et 3) ; (2 et 4)} est un événement.

Définition

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire, un **ensemble d'issues** de cette expérience.

C'est donc un **sous-ensemble** de **l'univers**.

En général, un **événement** traduit une possibilité que l'on envisage pour le résultat de l'expérience.

Commentaire Il est important de comprendre que, lorsque l'expérience sera faite (on aura lancé nos deux dés), on pourra dire qu'un **événement est réalisé** si c'est l'**UNE des issues** qui le composent qui se réalise.

Exemple Si c'est l'issue (2 et 2) qui se réalise, l'événement « avoir un double » sera réalisé ;

si c'est l'issue (3 et 3) qui se réalise, l'événement « avoir un double » sera réalisé ;

si c'est l'issue (1 et 2) qui se réalise, l'événement « avoir un double » ne sera pas réalisé.

Exemples ❶ Pour l'expérience de l'exemple **a)** ❸ ci-dessus, décrire par une phrase l'événement : S = {6 ; 7 ; 8}.

❷ Dans le même exemple, décrire par ses issues l'événement : I = « avoir une somme impaire ».

Réponses.

❶ L'événement : S = {6 ; 7 ; 8} peut se décrire, par exemple, par la phrase : « obtenir deux numéros dont la somme est supérieure ou égale à 6 ».

❷ L'événement : I = « avoir une somme impaire » est l'événement : I = {3 ; 5 ; 7}

Cas particuliers

Reprenons l'exemple 2 précédent.
Parmi les ensembles d'issues que l'on peut fabriquer, donc les événements, il y en a deux particuliers.

1 L'ensemble formé de toutes les issues, autrement dit l'univers, est un événement :

E = { (1 et 1) ; (1 et 2) ; (1 et 3) ; (1 et 4) ; (2 et 2) ; (2 et 3) ; (2 et 4) ; (3 et 3) ; (3 et 4) ; (4 et 4) }.

Cet événement est sûr de se réaliser, puisqu'il contient toutes les issues possibles.

On l'appelle parfois l'événement certain.

On pourrait le traduire par « avoir un résultat, mais peu importe lequel ».

2 L'ensemble formé d'aucune des issues est aussi considéré comme un événement. On le note avec un symbole particulier, $\varnothing$, qui se lit « ensemble vide ».

$\varnothing = \{ \}$.

Cet événement ne peut pas se réaliser, puisqu'il ne contient aucune des issues possibles.

On l'appelle parfois l'événement impossible.

On pourrait le traduire par « ne pas avoir de résultat », ce qui est impossible, puisqu'on aura forcément un résultat lorsqu'on aura lancé nos dés, ou par une propriété manifestement impossible : « avoir au moins un 5 », « avoir une somme égale à 9 » ou « avoir un double 6 ».

Définitions

Soit une expérience aléatoire, dont les issues sont notées $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (on suppose qu'il y a n issues).

On appelle **événement certain** l'événement constitué de **toutes les issues** de l'expérience, c'est à dire **l'univers** : E = { $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ }.

On appelle **événement impossible** l'événement constitué d'**aucune issue** de l'expérience, c'est à dire **l'ensemble vide** : $\varnothing = \{ \}$.

c) Schémas illustrant les issues d'une expérience aléatoire

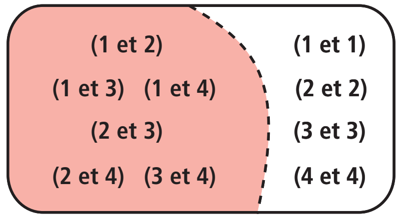
Il est souvent bien pratique de représenter l'**univers** d'une expérience aléatoire par un schéma qui montre bien comment on peut obtenir les différentes **issues**.

Ces schémas nous seront de plus bien utiles par la suite.

On trouve principalement trois types de schéma.

❶ Les diagrammes en forme de « patate », qui permettent de séparer différentes catégories d'issues :

Exemple Ici on a représenté l'**univers** de l'exemple ❷, en séparant les événements élémentaires correspondant au fait « d'obtenir un double ».



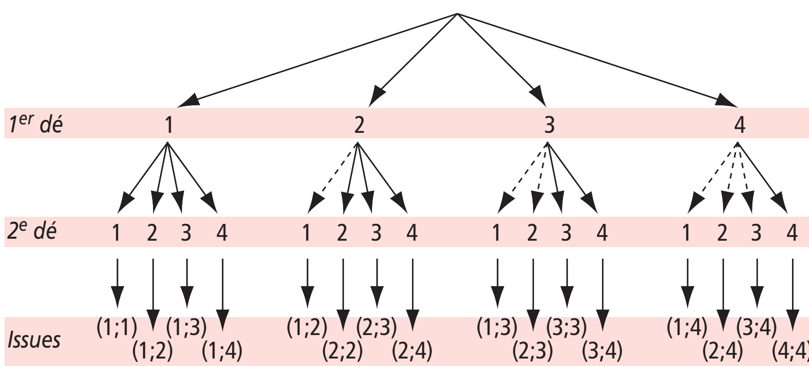
❷ Les tableaux à double entrée, lorsque deux critères structurent les issues :

Exemple Ici on a représenté l'**univers** de l'exemple ❷, en faisant apparaître les issues qui s'obtiennent de deux façons (cases grisées), et qu'il faudrait différencier si l'on pouvait distinguer les deux dés (par exemple avec deux couleurs différentes).

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	(1 et 1)	(1 et 2)	(1 et 3)	(1 et 4)
2	(1 et 2)	(2 et 2)	(2 et 3)	(2 et 4)
3	(1 et 3)	(2 et 3)	(3 et 3)	(3 et 4)
4	(1 et 4)	(2 et 4)	(3 et 4)	(4 et 4)

❸ Les schémas en arbre qui montrent une sorte de chronologie du déroulement de l'expérience :

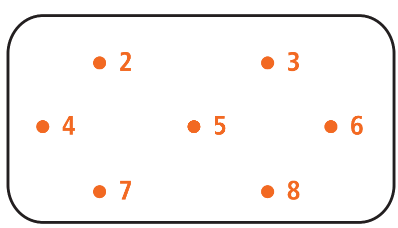
Exemple Ici on a représenté l'**univers** de l'exemple ❷, en faisant apparaître les issues qui s'obtiennent de deux façons (flèches pointillées), et qu'il faudrait différencier si l'on pouvait distinguer les deux dés (par exemple avec deux couleurs différentes).



Exemple Représenter l'**univers** de l'exemple ❸ par un diagramme en « patate » et par un tableau à double entrée.

Réponse.

Par un diagramme en « patate » :



Par un tableau à double entrée :

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

1 Loi de probabilité

a) Probabilité d'un événement élémentaire

Reprenons les deux premiers exemples précédents, au début du cours, et regardons quelle chance a-t-on que chacun des résultats se produise.

Pour l'exemple 1, où l'on veut lancer un dé à quatre faces et s'intéresser au numéro obtenu, les événements élémentaires sont : n°1, n°2, n°3 et n°4.

Si le dé est « normal », on est dans le même cas de figure que dans l'activité 2, et l'on peut, en raisonnant sur l'**égalité des chances**, admettre que chaque issue a une chance sur quatre de se produire : on dira une **probabilité** de $\frac{1}{4}$.

Pour l'exemple 2, où l'on veut lancer deux dés identiques à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus, les événements élémentaires sont : (1 et 1), (1 et 2), (1 et 3), (1 et 4), (2 et 2), (2 et 3), (2 et 4), (3 et 3), (3 et 4) et (4 et 4).

Mais là, on **ne peut pas** raisonnablement **supposer** qu'il y a **égalité des chances**, car on voit qu'il y a deux façons d'obtenir le résultat (1 et 2), suivant que le 1 est sur un dé ou sur l'autre, alors qu'il n'y a qu'une façon d'obtenir (1 et 1).

Comment calculer les chances de se produire de chaque issue ?

On va utiliser les schémas évoqués précédemment, en particulier un tableau à double entrée ou un schéma en arbre.

Prenons le tableau.

Puisque chaque colonne correspond à une issue pour le premier dé, on peut dire qu'il y a égalité de chance d'avoir une colonne plutôt qu'une autre.

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	(1 et 1)	(1 et 2)	(1 et 3)	(1 et 4)
2	(1 et 2)	(2 et 2)	(2 et 3)	(2 et 4)
3	(1 et 3)	(2 et 3)	(3 et 3)	(3 et 4)
4	(1 et 4)	(2 et 4)	(3 et 4)	(4 et 4)

De même pour les lignes puisqu'elles correspondent aux issues pour le deuxième dé.

On peut ainsi admettre que toutes les cases du tableau ont la même chance de se produire : soit une chance sur seize.

On peut alors en déduire la **probabilité** des différentes issues de l'expérience aléatoire :

(1 et 1) correspond à une case, on dira que sa **probabilité** est de $\frac{1}{16}$.

Il en est de même pour toutes les issues « doubles » : (2 et 2), (3 et 3), (4 et 4).

(1 et 2) correspond à deux cases, on dira que sa **probabilité** est de $\frac{2}{16}$.

Il en est de même pour toutes les autres issues : (1 et 3), (1 et 4), (2 et 3), (2 et 4) et (3 et 4).

Remarque

Dans d'autres cas, comme dans l'**activité** 3, on a vu que c'était les données statistiques qui permettaient de trouver la **probabilité** de chaque issue.

Définitions

Lors d'une expérience aléatoire, dont les issues sont notées a_1, a_2, a_3, …, a_n, on peut attribuer **à chaque issue** de cette expérience un nombre représentant **ses chances de se produire** :

on dit que c'est la **probabilité** de cette **issue**.

L'ensemble des issues et de leurs probabilités constitue **la loi de probabilité** de l'expérience aléatoire.

Notation On peut noter ces nombres avec des indices permettant de retrouver à quelle issue chaque nombre correspond :

p_1 est la probabilité de l'issue a_1, p_2 est la probabilité de l'issue a_2, p_3 est la probabilité de l'issue a_3, …, p_n est la probabilité de l'issue a_n.

On peut aussi noter ces nombres de manière fonctionnelle :

$p_1 = \mathrm{p}(a_1)$, $p_2 = \mathrm{p}(a_2)$, $p_3 = \mathrm{p}(a_3)$, …, $p_n = \mathrm{p}(a_n)$.

On a vu comme remarques à la fin des **activités** 2 et 3, que ces nombres sont nécessairement inférieurs à 1 (et bien sûr positifs), et que leur somme vaut 1. Ces propriétés sont caractéristiques des probabilités.

Propriété

Lors d'une expérience aléatoire, dont les issues sont notées a_1, a_2, a_3, …, a_n, la probabilité de chaque issue est un nombre compris entre 0 et 1 :

pour n'importe quel indice i, $0 \leq p_i \leq 1$ $\left(\text{ou } 0 \leq p(a_i) \leq 1\right)$.

De plus, ces probabilités vérifient :

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$ (ou $p(a_1)+p(a_2)+p(a_3)+\ldots+p(a_n)=1$).

Par exemple,

pour l'exemple ❷, où l'on veut lancer deux dés identiques à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus, les événements élémentaires sont :

(1 et 1), (1 et 2), (1 et 3), (1 et 4), (2 et 2), (2 et 3), (2 et 4), (3 et 3), (3 et 4) et (4 et 4).

On a vu que : $p(1\text{ et }1)=p(2\text{ et }2)=p(3\text{ et }3)=p(4\text{ et }4)=\dfrac{1}{16}$ (compris entre 0 et 1),

et que : $p(1\text{ et }2)=p(1\text{ et }3)=p(1\text{ et }4)=p(2\text{ et }3)=p(2\text{ et }4)=p(3\text{ et }4)=\dfrac{2}{16}$ (aussi entre 0 et 1).

De plus on a aussi :

$$p(1\text{ et }1)+p(2\text{ et }2)+p(3\text{ et }3)+p(4\text{ et }4)+p(1\text{ et }2)+p(1\text{ et }3)+p(1\text{ et }4)+$$
$$+p(2\text{ et }3)+p(2\text{ et }4)+p(3\text{ et }4)=4\times\frac{1}{16}+6\times\frac{2}{16}=\frac{16}{16}=1.$$

Exemple Pour l'expérience de l'exemple ❸, établir la loi de probabilité (on pourra utiliser un tableau à double entrée).

Réponse.

Reprenons le tableau à double entrée de la page 107.

Puisque chaque colonne correspond à une issue pour le premier dé, on peut dire qu'il y a égalité de chance d'avoir une colonne plutôt qu'une autre.

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

De même pour les lignes puisqu'elles correspondent aux issues pour le deuxième dé.

On peut ainsi admettre que toutes les cases du tableau ont la même chance de se produire : soit une chance sur seize.

On peut alors en déduire la **probabilité** des différentes issues de l'expérience aléatoire :

2 correspond à une case, on peut dire que sa **probabilité** est de $\dfrac{1}{16}$.
Il en est de même pour l'issue 8.

3 correspond à deux cases, on peut dire que sa **probabilité** est de $\dfrac{2}{16}$.
Il en est de même pour l'issue 7.

4 correspond à trois cases, on peut dire que sa **probabilité** est de $\dfrac{3}{16}$.
Il en est de même pour l'issue 6.

Enfin, 5 correspond à quatre cases, donc sa **probabilité** est $\dfrac{4}{16}$.

b) Équiprobabilité

Le cas particulier de l'exemple ❶, ou de l'activité ❷, où toutes les issues ont la même probabilité de se produire, est très fréquent.

Cette situation qu'il faut apprendre à reconnaître, amène des calculs relativement simples.

Définition

Lors d'une expérience aléatoire, si toutes les issues ont **la même chance de se produire**, on dit qu'il y a **équiprobabilité** (ou que les issues sont **équiprobables**).

Les propriétés énoncées ci-dessus nous montrent que chaque issue aura alors comme probabilité :

$p=\frac{1}{n}$, où n **est le nombre d'issues** de l'expérience.

Démonstration

Considérons une expérience aléatoire, dont les issues sont notées a_1, a_2, a_3, …, a_n, et pour laquelle il y a **équiprobabilité**. On aura donc :

$p_1=p_2=p_3=...=p_n$ et $p_1+p_2+p_3+...+p_n=1.$

Donc : $n\times p_1=1.$ Ce qui donne bien : $p_1=\frac{1}{n}=p_2=p_3=...=p_n.$

Exemples

❶ On veut tirer au hasard une date dans le calendrier d'une année non bissextile. Quelle est la probabilité de tomber sur Noël ?

❷ Un restaurant propose un menu rapide composé d'un plat principal et d'un dessert.

Il offre le choix de trois plats principaux et de deux desserts.

Ne sachant que choisir, je décide de tirer au hasard le plat principal, puis le dessert pour composer mon menu.

Décrire l'**univers** et la **loi de probabilité** de cette expérience aléatoire.

Réponses.

❶ Dans l'énoncé, l'expression « au hasard » signifie que toutes les dates ont la même chance d'être tirées.

On est alors en situation d'**équiprobabilité**. La probabilité de tomber sur Noël est donc :

$\text{p(Noël)}=\frac{1}{365}$ puisqu'il y a 365 issues possibles.

C'est d'ailleurs ce que l'intuition nous suggère, et on aurait le même résultat pour n'importe quelle date, même moins remarquable.

❷ On peut représenter les différents menus (les issues) par un tableau à double entrée.

Puisque chaque colonne correspond à une issue pour le premier tirage, on peut dire qu'il y a égalité de chance d'avoir une colonne plutôt qu'une autre puisque ce tirage est « au hasard ».

Plat / Dessert	1	2	3
1	(1 et 1)	(2 et 1)	(3 et 1)
2	(1 et 2)	(2 et 2)	(3 et 2)

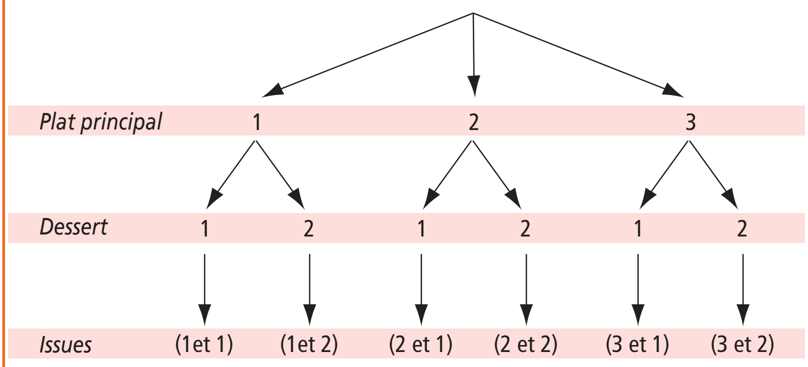
De même pour les lignes puisqu'elles correspondent aux issues du deuxième tirage.

On peut ainsi admettre que toutes les cases du tableau ont la même chance de se produire : il y a **équiprobabilité**, et il y a 6 issues possibles.

La probabilité de chaque menu est donc : $\frac{1}{6}$.

Remarque

Un schéma en arbre se prête aussi très bien à ce genre d'expérience :



c) Loi de probabilité d'une expérience aléatoire non équiprobable, mais à base d'équiprobabilité

Dans ces situations non équiprobables, pour déterminer la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, il faut :
– se ramener à une situation où il y a équiprobabilité,
– déterminer la probabilité de chaque issue possible de l'expérience.

Exemple Dans une boîte se trouvent trois boules vertes et une boule blanche, indiscernables au toucher.

On en tire une au hasard, et sans la remettre dans la boîte, on en tire une deuxième, encore au hasard. On note les couples de couleurs obtenues, en tenant compte de l'ordre de tirage.

Décrire l'**univers** et la **loi de probabilité** de cette expérience aléatoire.

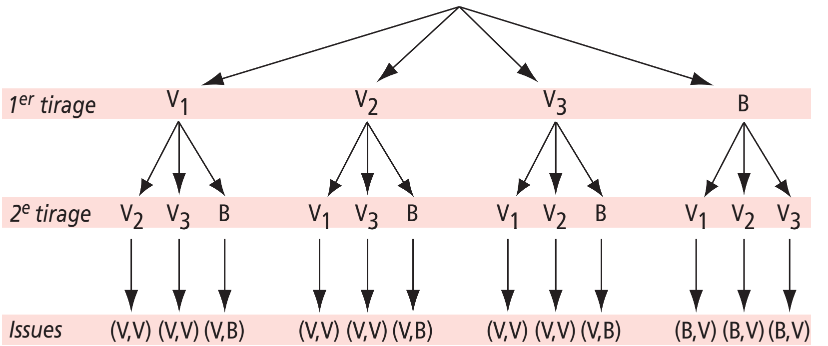
Les issues de cette expérience sont faciles à déterminer. En notant V la couleur verte et B la couleur blanche, on trouve : (V,V), (V,B) et (B,V) car on ne peut pas tirer deux boules blanches.

L'**univers** est donc : { (V,V) ; (V,B) ; (B,V) }.

Mais ces issues ne sont pas équiprobables : on a certainement plus de chance d'obtenir (V,V) que (V,B).

Pour se ramener à une situation équiprobable, on va raisonner sur les boules (en les supposant toutes différentes) et non pas sur les couleurs. On peut par exemple imaginer que les boules sont numérotées.

On va représenter les différents tirages par un schéma en arbre.



Puisque chaque tirage se fait « au hasard », on peut dire qu'il y a égalité de chance d'avoir une branche de l'arbre plutôt qu'une autre. Il y a **équiprobabilité** des branches et il y en a 12. On peut maintenant calculer la probabilité de chaque issue de notre expérience.

L'issue (V,V) est obtenue avec 6 branches, sa probabilité est donc : $\frac{6}{12}=0,5.$

L'issue (V,B) est obtenue avec 3 branches, sa probabilité est donc : $\frac{3}{12}=0,25.$

L'issue (B,V) est obtenue avec 3 branches, sa probabilité est donc : $\frac{3}{12}=0,25.$

d) Probabilité d'un événement quelconque

Reprenons les exemples du début du cours, et regardons quelle chance on a qu'un certain **événement** se réalise.

Pour l'exemple 1, où l'on veut lancer un dé « normal » à quatre faces et s'intéresser au numéro obtenu, les événements élémentaires sont : n°1, n°2, n°3 et n°4.

La loi de probabilité est : $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=\frac{1}{4}.$

Considérons l'événement : « avoir un n° pair », que l'on peut écrire {2 ; 4}.

Quelle est la probabilité qu'il se produise ? Intuitivement, on voit que l'on a **deux chances** sur quatre qu'il se produise. On pourrait donc écrire : $p(\text{« avoir un n° pair »})=\frac{2}{4}.$

On peut remarquer que cet événement est constitué de **deux issues**, et que l'on a :

$$p(\text{« avoir un n° pair »})=p(\{2\,;4\})=p(2)+p(4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}.$$

Ceci traduit le fait que l'événement sera réalisé si l'une ou l'autre des deux issues se réalise, ce qui nous donne comme probabilité que l'événement se réalise, la probabilité de la première issue, **plus** celle de la seconde.

Pour l'exemple 2, où l'on veut lancer deux dés identiques à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus, les issues sont :

(1 et 1), (1 et 2), (1 et 3), (1 et 4), (2 et 2), (2 et 3), (2 et 4), (3 et 3), (3 et 4) et (4 et 4).

La loi de probabilité est : $p(1 \text{ et } 1) = p(2 \text{ et } 2) = p(3 \text{ et } 3) = p(4 \text{ et } 4) = \frac{1}{16}$,

$p(1 \text{ et } 2) = p(1 \text{ et } 3) = p(1 \text{ et } 4) = p(2 \text{ et } 3) = p(2 \text{ et } 4) = p(3 \text{ et } 4) = \frac{2}{16}$.

Considérons l'événement : « avoir un double », que l'on peut écrire { (1 et 1) ; (2 et 2) ; (3 et 3) ; (4 et 4) }.

Quelle est la probabilité qu'il se produise ? Intuitivement, en regardant le tableau à double entrée représentant les issues, on voit que l'on a **quatre chances** sur seize qu'il se produise. On pourrait donc écrire : $p(\text{« avoir un double »}) = \frac{4}{16}$.

On peut remarquer que cet événement est constitué de **quatre issues**, et que l'on a :

$$\begin{aligned} p(\text{« avoir un double »}) &= p(\{(1 \text{ et } 1) ; (2 \text{ et } 2) ; (3 \text{ et } 3) ; (4 \text{ et } 4)\}) \\ &= p(1 \text{ et } 1) + p(2 \text{ et } 2) + p(3 \text{ et } 3) + p(4 \text{ et } 4) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}. \end{aligned}$$

Ceci traduit le fait que l'événement sera réalisé si l'une ou l'autre des quatre issues se réalise, ce qui nous donne comme probabilité que l'événement se réalise, la probabilité de la première issue, **plus** celle de la seconde, **plus** celle de la troisième, **plus** celle de la quatrième.

De même, considérons l'événement : « avoir deux numéros dont la somme fasse 4 », que l'on peut écrire { (1 et 3) ; (2 et 2) }.

Quelle est la probabilité qu'il se produise ? Intuitivement, en regardant le tableau à double entrée représentant les issues, on voit que l'on a **trois chances** sur seize qu'il se produise. On pourrait donc écrire : $p(\text{« avoir deux numéros dont la somme fasse 4 »}) = \frac{3}{16}$.

On peut remarquer ce cet événement est constitué de **deux issues**, et que l'on a :

$$\begin{aligned} p(\text{« avoir deux numéros dont la somme fasse 4 »}) &= p(\{(1 \text{ et } 3) ; (2 \text{ et } 2)\}) \\ &= p(1 \text{ et } 3) + p(2 \text{ et } 2) \\ &= \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Ceci traduit le fait que l'événement sera réalisé si l'une ou l'autre des deux issues se réalise, ce qui nous donne comme probabilité que l'événement se réalise, la probabilité de la première issue, **plus** celle de la seconde.

Ce procédé se généralise.

Propriété

Lors d'une expérience aléatoire, la **probabilité** d'un **événement quelconque** est la **somme** des probabilités de **toutes les issues** qui composent cet événement.

Par exemple,

pour l'exemple 2, où l'on veut lancer deux fois un dé à quatre faces et s'intéresser aux deux numéros obtenus, sans tenir compte de l'ordre.

On considère l'événement « avoir un double **OU** avoir deux numéros dont la somme fasse 4 ».

Cet événement est constitué des issues : { (1 et 1) ; (1 et 3) ; (2 et 2) ; (3 et 3) ; (4 et 4)}.

Sa probabilité est :

$$p(1\text{ et }1)+p(1\text{ et }3)+p(2\text{ et }2)+p(3\text{ et }3)+p(4\text{ et }4)=\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}.$$

Exemple Pour l'expérience de l'exemple 3, calculer les probabilités des événements : S = {6 ; 7 ; 8} et I = {3 ; 5 ; 7}.

Réponse.

On a :

$$p(S)=p(6)+p(7)+p(8)=\frac{3}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}.$$

$$p(I)=p(3)+p(5)+p(7)=\frac{2}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}=\frac{8}{16}.$$

Cas particulier

On a vu dans la partie 1 b) que pour toute expérience aléatoire, on a toujours deux événements particuliers, l'événement certain (l'univers) et l'événement impossible (l'ensemble vide).
Il est facile de calculer leur probabilité.

Propriétés

On note E l'univers d'une expérience aléatoire.

La probabilité de **l'événement certain** est : $p(E)=1.$

La probabilité de **l'événement impossible** est : $p(\varnothing)=0.$

Explication L'univers est constitué de toutes les issues possibles. Sa probabilité est donc la somme de toutes les probabilités de ces issues. Or nous avons vu au début de cette partie 2 que la somme de toutes les probabilités de toutes les issues valait 1.

La probabilité de l'univers est donc 1.

Quant à l'événement impossible, c'est par convention (c'est-à-dire par décision arbitraire mais admise de tous) que l'on a $p(\varnothing)=0.$

Mais cette convention est conforme à l'intuition (il y a 0 chances sur… que l'on ait l'événement impossible) et aussi à la propriété indiquant le calcul de la probabilité d'un événement (c'est la somme des probabilités des issues de l'événement : $\varnothing$ n'a aucune issue, donc sa probabilité est 0).

Équiprobabilité

En situation d'équiprobabilité, les calculs sont là aussi simplifiés.

Propriétés

Lors d'une expérience aléatoire **équiprobable**, la probabilité d'un **événement quelconque** A est égale à : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Démonstration

S'il y a équiprobabilité, chaque issue a pour probabilité $p = \dfrac{1}{n}$, où n est le nombre total d'issues de l'expérience.

Si l'événement A est constitué de k issues, sa probabilité est la somme des probabilités de ces k issues :

$p(A) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ (k fois), puisqu'elles ont toutes même probabilité $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ce qui fait bien : $p(A) = k \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Exemple

On veut tirer au hasard une date dans le calendrier d'une année non bissextile. Quelle est la probabilité de tomber sur un jour de décembre ?

Dans l'énoncé, l'expression « au hasard » signifie que toutes les dates ont la même chance d'être tirées.

On est en situation d'**équiprobabilité**, chaque jour ayant comme probabilité d'être tiré : $\dfrac{1}{365}$.

La probabilité de tomber sur un jour de décembre est donc :

$$p(\text{Décembre}) = \frac{\text{nombre de jours de décembre}}{\text{nombre total de jours}} = \frac{31}{365}.$$

C Synthèse du cours

1 Le langage des probabilités

Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celle qui se produira.

Les **issues** sont aussi appelées les **événements élémentaires**, ou les **éventualités**.

Vocabulaire

On regroupe souvent toutes les **issues** d'une expérience aléatoire dans un même ensemble, que l'on appelle l'**univers** de l'expérience.

Définition

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire, un **ensemble d'issues** de cette expérience.

C'est donc un **sous-ensemble** de **l'univers**.

Définitions

Soit une expérience aléatoire, dont les issues sont notées $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (on suppose qu'il y a n issues).

On appelle **événement certain** l'événement constitué de **toutes les issues** de l'expérience, c'est à dire **l'univers** : $E = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \}$.

On appelle **événement impossible** l'événement constitué d'**aucune issue** de l'expérience, c'est à dire **l'ensemble vide** : $\varnothing = \{ \ \}$.

2 Loi de probabilité

Propriétés

Lors d'une expérience aléatoire, dont les issues sont notées a_1, a_2, a_3, …, a_n, la probabilité de chaque issue est un nombre compris entre 0 et 1 :
pour n'importe quel indice i, $0 \le p_i \le 1$ (ou $0 \le p(a_i) \le 1$).
De plus, ces probabilités vérifient :

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1 \quad (\text{ ou } p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + ... + p(a_n) = 1).$$

Propriété

Lors d'une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement quelconque est la somme des probabilités de toutes les issues qui composent cet événement.

Propriétés

On note E l'univers d'une expérience aléatoire.

La probabilité de l'événement certain est : $p(E) = 1$.

La probabilité de l'événement impossible est : $p(\varnothing) = 0$.

Propriété

Lors d'une expérience aléatoire équiprobable, la probabilité d'un événement quelconque A est égale à : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

D Exercices d'apprentissage

Dans les exercices 9 et 10, indiquer la ou les bonnes réponses.

Exercice 9 On joue à Pile ou Face (P ou F) deux fois de suite avec une pièce bien équilibrée.

La probabilité d'obtenir deux fois Face, p(F, F) est :

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{4}$ d. égale à p(P, P)

Exercice 10

❶ Deux boules rouges et une noire, indiscernables au toucher, sont dans une boîte. On en tire deux successivement, en remettant la première dans la boîte avant de tirer la deuxième.

La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :

a. $\frac{2}{9}$ b. $\frac{4}{9}$ c. $\frac{4}{6}$ d. 1

❷ Deux boules rouges et une noire, indiscernables au toucher, sont dans une boîte. On en tire deux successivement, sans remettre la première dans la boîte.

La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :

a. 1 b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{9}$

Exercice 11

Dans une boîte se trouvent une boule blanche numérotée 1, deux boules rouges numérotées 2 et 3, et deux boules noires numérotées 4 et 5.

On tire une boule au hasard dans la boîte et on regarde le numéro tiré.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer un numéro pair ?

Exercice 12

Dans une boîte se trouvent une boule blanche numérotée 1, deux boules rouges numérotées 2 et 3, et deux boules noires numérotées 4 et 5.

On tire une boule au hasard dans la boîte et on regarde la couleur tirée.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer une couleur du drapeau français ?

Exercice 13

Dans une boîte se trouvent une boule blanche numérotée 1, deux boules rouges numérotées 2 et 3, et deux boules noires numérotées 4 et 5.

On tire une boule au hasard dans la boîte, on la remet, et on en tire au hasard une deuxième. On s'intéresse aux deux numéros tirés, dans l'ordre.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer un double (événement D) ?

❸ Quelle est la probabilité de tirer un 3 en deuxième position (événement T) ?

❹ Quelle est la probabilité de tirer un premier numéro supérieur au second (événement S) ?

Exercice 14

Dans une boîte se trouvent une boule blanche numérotée 1, deux boules rouges numérotées 2 et 3, et deux boules noires numérotées 4 et 5.

On tire une boule au hasard dans la boîte et, sans la remettre, on en tire au hasard une deuxième. On s'intéresse aux deux numéros tirés, dans l'ordre.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer un double (événement D) ?

❸ Quelle est la probabilité de tirer un 3 en deuxième position (événement T) ?

4 Quelle est la probabilité de tirer un premier numéro supérieur au second (événement S) ?

Exercice 15

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes ordinaires.

1 Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2 Quelle est la probabilité de tirer un cœur (événement C) ?

3 Quelle est la probabilité de tirer une figure (événement F) ?

Exercice 16

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes ordinaires, puis, sans la remettre, on en tire une seconde, également au hasard.

1 Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2 Quelle est la probabilité de tirer les deux as rouges (cœur et carreau) ?

3 Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

Exercice 17

Dans un grand port européen, arrivent chaque jour 5000 conteneurs venant d'Europe (la moitié), d'Asie (30%) et d'Amérique.

Parmi les conteneurs venant d'Europe, 5% sont en infraction, de même pour ceux venant d'Amérique.

1 Compléter le tableau ci-contre

Provenance / État	Europe	Asie	Amérique
Nb de conteneurs en règle			
Nb de conteneurs en infraction		125	

Les douaniers tirent au hasard un conteneur parmi les 5000 arrivés.

2 Quelle est la probabilité d'en tirer un en règle (événement R) ?

3 Quelle est la probabilité d'en tirer un venant d'Asie (événement A) ?

Exercice 18

On lance un dé truqué à six faces, dont on a fait en sorte que la probabilité de sortir de chaque face soit proportionnelle au numéro de la face.

1 Quel est l'univers ? Y a-t-il équiprobabilité ?

2 Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

1. Calculer le salaire moyen de l'entreprise, et la masse salariale totale.
2. Pour faire taire certaines critiques, le PDG envisage d'augmenter le salaire moyen de l'entreprise de 4,17 %.

a. Les délégués syndicaux proposent immédiatement une augmentation de chaque salaire de 4,17 %.

Calculer les salaires de chaque catégorie, le salaire moyen et la masse salariale totale.

b. Le PDG propose quant à lui de restructurer l'entreprise en supprimant 24 ouvriers et en répartissant les salaires ainsi économisés entre les 576 salariés restant.

Calculer les salaires de chaque catégorie, le salaire moyen et la masse salariale totale.

c. Les actionnaires souhaitent une restructuration massive de l'entreprise en supprimant 200 ouvriers, sans augmentation des autres salariés.

Calculer les salaires de chaque catégorie, le salaire moyen et la masse salariale totale.

d. Résumer ces trois propositions dans un tableau et conclure.

Exercice V

On suppose que, lors de la naissance d'un enfant, il y a équiprobabilité que ce soit un garçon ou une fille.

On s'intéresse à une femme qui veut avoir trois enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait 3 garçons ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait exactement 2 garçons et 1 fille ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins 1 fille ?
4. Quelle est la probabilité qu'elle ait 1 fille comme troisième enfant ?

Exercice VI

On lance trois dés à six faces, bien équilibrés et on note les trois numéros sortis.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un triple 6 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un 4, un 2 et un 1 (donc un 421) ?

Exercice VII

On a dans une boîte quinze boules numérotés de 1 à 15, et indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, puis, sans la remettre dans la boîte, on en tire une deuxième et, toujours sans la remettre, une troisième. On note les trois numéros dans l'ordre du tirage.

On dira qu'on a le tiercé dans l'ordre si l'on a tiré les numéros 1, 2 et 3 dans cet ordre.

On dira qu'on a le tiercé dans le désordre si l'on a tiré les numéros 1, 2 et 3 dans n'importe quel ordre.

1. Quelle est la probabilité d'avoir le tiercé dans l'ordre ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir le tiercé dans le désordre ?

Exercice VIII

Une épreuve est composée d'un QCM comportant trois questions.

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, dont une seule est bonne.

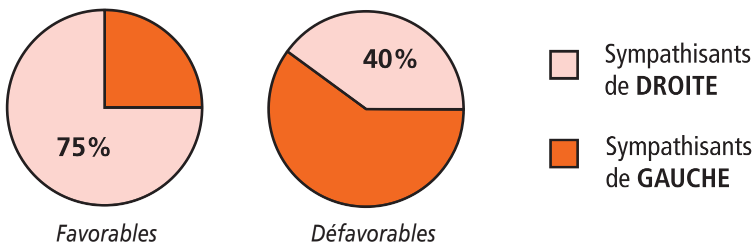
On décide de répondre au hasard à chaque question.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les trois réponses justes ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux réponses justes ?

Exercice IX Une épreuve est composée d'un QCM comportant dix questions.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, dont une seule est bonne.
On décide de répondre au hasard à chaque question.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les dix réponses justes ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement neuf réponses justes ?

Exercice X Une enquête d'opinion sur la popularité d'un homme politique de Droite a été faite auprès de 900 personnes. Elle a donné les résultats suivants :



1. Compléter le tableau suivant.

Sympathie \ Opinion	Favorable	Défavorable	Ne se prononce pas	Total
Droite			0	
Gauche	90	174		
Total				900

On tire au hasard une personne parmi les 900 pour l'interroger.

2. Quelle est la probabilité qu'elle soit d'opinion favorable (événement F) ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle ne se prononce pas (événement N) ?
4. Quelle est la probabilité qu'elle soit sympathisant de Droite (événement D) ?

Exercice XI Une ville de 40 000 habitants a fait réaliser une enquête statistique pour savoir quelle proportion de sa population était satisfaite de son logement.
L'enquête a partagé la ville en trois zones : le centre ville, la zone intermédiaire et la zone périphérique.
On a relevé que 10 % de la population habite en centre ville. Dans les 60 % habitant en zone intermédiaire, 6,25 % déclarent ne pas être satisfaits de leur logement.

En zone périphérique, il y a cinq fois plus d'habitants satisfaits de leur logement que d'habitants non satisfaits.
Pour l'ensemble de la ville, 10 % des habitants ne sont pas satisfaits de leur logement.

1. Compléter le tableau suivant qui donne les effectifs de chaque catégorie d'habitant :

	Centre ville	Zone intermédiaire	Zone périphérique
Satisfaits			
Non satisfaits			

On interroge au hasard un habitant, en supposant que chaque habitant a la même probabilité d'être interrogé.

2 Quelle est la probabilité qu'il réside en zone périphérique (évènement P) ?

3 Quelle est la probabilité qu'il soit satisfait de son logement (évènement S) ?

Exercice XII

On considère l'algorithme suivant.

Entrée ENTRER N

Traitement DANS A METTRE le quotient de la division euclidienne de N par 10
DANS B METTRE N-10*A
DANS M METTRE A-2*B
TANT QUE M $\geq$ 10
    DANS A METTRE le quotient de la division euclidienne de M par 10
    DANS B METTRE M-10*A
    DANS M METTRE A-2*B
    FIN DU TANT QUE

Sortie AFFICHER M

1 Faire fonctionner l'algorithme pour N=2492 puis N=129 et enfin N=70.

2 Si n est un entier, on note $f(n)$ la valeur obtenue M par l'algorithme si la valeur entrée (N) est n. On admet que si $f(n)$ est divisible par 7 alors n est divisible par 7.

a) En déduire parmi les nombres 2492, 129 et 70, ceux qui sont divisibles par 7.

b) En programmant l'algorithme sur calculatrice, déterminer si les nombres $2^{27}-1$, $2^{27}+1$, $3^{27}-1$ et $3^{27}+1$ sont divisibles par 7 ou non.

Exercice XIII

On considère l'algorithme suivant.

Entrée A et B sont des entiers naturels tels que $1 \leq B \leq A$.

Traitement Dans K mettre 1
Dans R mettre le reste de la division euclidienne de A par B.
Tant que R $\neq 0$
    Dans K mettre K+1
    Dans R mettre le reste de la division euclidienne de A+R par B.
    Fin de la boucle «Tant que»
Dans S mettre A $\times$ K.

Sortie Afficher S.

1 Faire fonctionner cet algorithme pour

a) A = 50 et B = 20

b) A = 48 et B = 30.