Corrigé Séquence 3

Corrigé des activités du chapitre 2

Activité 1 Tri sélectif

Une enquête portant sur le tri sélectif a été réalisée et 2000 personnes ont été interrogées.

On leur a posé la question : « Triez-vous le verre et le papier ? ».

Voici les résultats pour les effectifs :

Tri / Age	Oui	Non	Total par ligne
Moins de 40 ans : J	700	400	1100
40 ans et plus : $\bar{J}$	500	400	900
Total par colonne	1200	800	2000 : Total général

❶ On choisit au hasard une personne parmi les 2000 personnes interrogées, on utilise donc la loi équirépartie, l'univers Ω étant formé par l'ensemble des 2000 personnes interrogées.

$$P(T)=\frac{card(T)}{card(\Omega)}=\frac{1200}{2000}=0{,}6$$

$$P(J)=\frac{card(J)}{card(\Omega)}=\frac{1100}{2000}=0{,}55$$

$$P(T\cap J)=\frac{700}{2000}=0{,}35.$$

❷ On choisit maintenant au hasard une personne parmi celles faisant du tri sélectif. On utilise toujours une loi équirépartie, mais il faut tenir compte que l'univers a changé, c'est maintenant l'événement T pour lequel $card(T)=1200.$

La probabilité qu'une personne ait moins de 40 ans sachant qu'elle fait du tri sélectif est donc égale à $\frac{card(J\cap T)}{card(T)}=\frac{700}{1200}=\frac{7}{12}$.

On remarque que cette probabilité est différente de la valeur de $P(J)$ déterminée à la question précédente.

En observant les valeurs des probabilités de la question ❶, on obtient que

$$\frac{card(J\cap T)}{card(T)}=\frac{700}{1200}=\frac{\frac{700}{2000}}{\frac{1200}{2000}}=\frac{P(J\cap T)}{P(T)}.$$

❸ De la même façon, si on choisit une personne au hasard parmi les personnes ayant moins de 40 ans, l'univers est J pour lequel $card(J)=1100$.

La probabilité qu'une personne fasse du tri sélectif sachant qu'elle a moins de 40 ans est donc égale à $\frac{card(J\cap T)}{card(J)}=\frac{700}{1100}=\frac{7}{11}$ et on a aussi $\frac{card(J\cap T)}{card(J)}=\frac{P(J\cap T)}{P(J)}$.

Plus généralement, et même s'il n'y a pas équiprobabilité, on utilisera des quotients analogues pour étudier ce type de probabilité liée à une condition.

Activité 2

❶ Dans l'initialisation, 30 dates d'anniversaire sont fixées aléatoirement entre 1 et 365 (on suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile).

Lors du traitement, chaque date (numérotée k) parmi les 29 premières dates d'anniversaire (le compteur k va de 1 à 29) est comparée avec les dates qui la suivent (ce sont les dates numérotées de $k+1$ à 30). Si deux dates coïncident, le booléen « trouvé », qui a été initialisé avec la valeur « faux » prend la valeur « vrai ».

À la sortie, la valeur du booléen « trouvé » est affichée : si aucune coïncidence n'a été trouvée, « faux » est affiché, et, si une coïncidence a été trouvée, c'est « vrai » qui est affiché.

❷ Pour obtenir un algorithme qui donne la fréquence des groupes où il existe des coïncidences d'anniversaires dans 1000 groupes de 30 personnes, on insère l'algorithme précédent, dans une boucle.

Variables

dates : tableau des trente jours d'anniversaire ;

trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident ;

i, k, p : trois compteurs de boucles ;

N : un entier naturel

f : un nombre réel compris entre 0 et 1.

Initialisation

$i=0$

$N=0$

```
Traitement
    Pour i de 0 à 1000
        Pour k de 1 à 30
            dates[k] prend une valeur entière aléatoire comprise
            entre 1 et 365 inclus
        trouvé prend la valeur faux
        Pour k de 1 à 29
            Pour p de k+1 à 30
                Si dates[k] = dates[p] alors
                    trouvé prend la valeur vrai
            Si trouvé = vrai  N+1 → N
N/1000 → f
Sortie
    Affiche f
```

```
VARIABLES
  trouvé EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  f EST_DU_TYPE NOMBRE
  dates EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
  i PREND_LA_VALEUR 0
  N PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 0 A 1000
    DEBUT_POUR
    POUR k ALLANT_DE 1 A 30
      DEBUT_POUR
      dates[k] PREND_LA_VALEUR floor(365*random())+1
      trouvé PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_POUR
    POUR k ALLANT_DE 1 A 29
      DEBUT_POUR
      POUR p ALLANT_DE k+1 A 30
        DEBUT_POUR
        SI (dates[k]==dates[p]) ALORS
          DEBUT_SI
          trouvé PREND_LA_VALEUR 1
          FIN_SI
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    SI (trouvé==1) ALORS
      DEBUT_SI
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  f PREND_LA_VALEUR N/1000
  AFFICHER f
FIN_ALGORITHME
```

❸ En faisant fonctionner cet algorithme, on trouve, par exemple, $f = 0{,}839$.

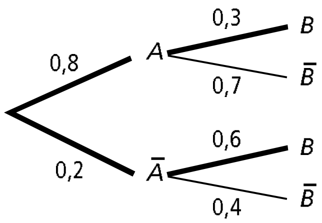
Cette fréquence peut paraître surprenante car on s'attend généralement à une fréquence plus faible.

Les probabilités conditionnelles, qui seront définies dans cette séquence, permettront de calculer la probabilité que deux anniversaires coïncident dans un groupe de 30 personnes et de comprendre les fréquences observées lors des simulations.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ Par lecture de l'arbre, $P(B) = 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}6$ (probabilités des deux chemins en gras) soit $P(B) = 0{,}36$.



La bonne réponse est la b).

(Il faut tenir compte de $P(A)$ et $P(\bar{A})$ donc cela ne peut être la a))

❷ $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$ donc la bonne réponse est la c). (ne pas confondre avec $P_{\bar{A}}(B)$).

❸ $P_A(B) = 0{,}3$ donc la bonne réponse est la a).
C'est la pondération de la branche : A ——— B.

Exercice 2

$P(A) = \dfrac{1}{2},\ P(B) = \dfrac{1}{4}$ *et* $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$.

On utilise la formule : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{10} \times 2 = \dfrac{1}{5}$.

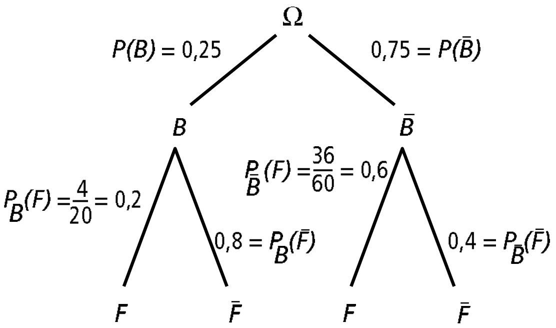
De même, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{10} \times 4 = \dfrac{2}{5}$.

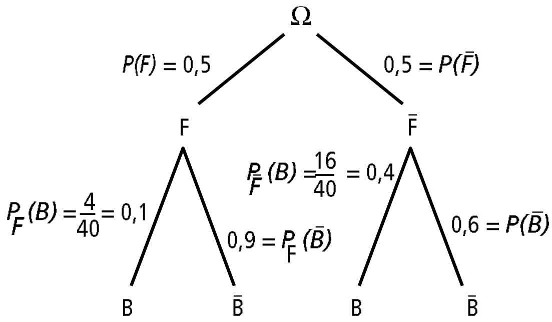
Exercice 3

Les données de l'énoncé permettent de déterminer le nombre de personnes qui ont les yeux bleus et qui ne fument pas, le nombre de celles qui fument et qui n'ont pas les yeux bleus et enfin le nombre de celles qui n'ont pas les yeux bleus et qui ne fument pas.

	F	$\bar{F}$	Total
B	4	16	20
$\bar{B}$	36	24	60
Total	40	40	80

On utilise ensuite la loi équirépartie sur Ω ou des lois équiréparties sur les univers utilisés pour les probabilités conditionnelles.

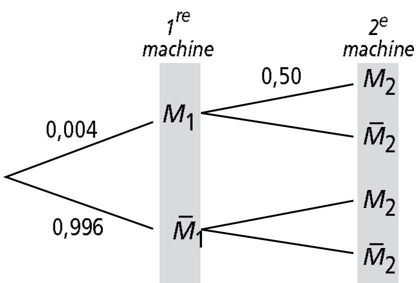




Exercice 4

❶ « Lorsque M_1 est en panne, la probabilité que M_2 tombe en panne est 0,5 » traduit une probabilité conditionnelle : la probabilité que M_2 tombe en panne sachant que M_1 est en panne est de 0,5 soit : $P_{M_1}(M_2) = 0{,}5$.

❷ Comme on nous donne $P_{M_1}(M_2)$, on construit l'arbre avec M_1, $\overline{M_1}$ d'abord :



$P(\overline{M}_1) = 1 - P(M_1) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$

❸ On utilise la formule : $P_{M_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)}$

avec $P(M_2) = 0{,}006$ (donné dans l'énoncé) et d'après l'arbre,

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \times P_{M_1}(M_2) = 0{,}004 \times 0{,}5 = 0{,}002$

d'où $P_{M_2}(M_1) = \dfrac{0{,}002}{0{,}006} = \dfrac{1}{3}$.

Remarque

On pourrait à l'aide de P(M_2) calculer les autres probabilités de l'arbre du ❷.

On a par exemple :

$P(M_2)=0{,}004\times0{,}5+0{,}996\times P_{\overline{M}_1}(M_2)=0{,}006$

d'où $P_{\overline{M}_1}(M_2)=\dfrac{0{,}006-0{,}004\times0{,}5}{0{,}996}=0{,}0040$ à 10^{-4} *près*.

Exercice 5

On introduit les événements A : « la pièce est acceptée » et D : « la pièce est défectueuse ».

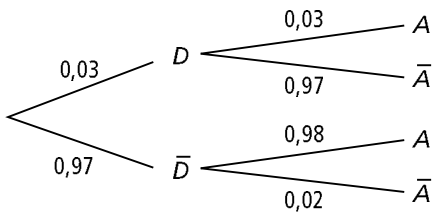
❶ 3 % des pièces sont défectueuses donc $P(D)=\dfrac{3}{100}=0{,}03$.

98 % des pièces bonnes sont acceptées donc la probabilité que la pièce soit acceptée sachant qu'elle est bonne (c'est-à-dire non défectueuse) est de $\dfrac{98}{100}$ soit de 0,98.

Donc $P_{\overline{D}}(A)=0{,}98$.

De même 97 % des pièces défectueuses sont refusées (donc non acceptées) se traduit par : $P_D(\overline{A})=0{,}97$.

On commence donc l'arbre par D, $\overline{D}$ car on a $P_{\overline{D}}(A)$ et $P_D(\overline{A})$ soit :



D'après la loi des nœuds, $P(\overline{D})=1-0{,}03=0{,}97$

$P_D(A)=1-0{,}97=0{,}03$

et $P_{\overline{D}}(\overline{A})=1-0{,}98=0{,}02$

❷ La probabilité qu'une pièce soit bonne mais refusée est $P(\overline{D}\cap\overline{A})$.

D'après l'arbre ci-dessus : $P(\overline{D}\cap\overline{A})\ =\ 0{,}97\times0{,}02\ =0{,}0194$.

❸ Une erreur de contrôle se produit si :

- soit la pièce est défectueuse mais acceptée.
- soit la pièce est bonne mais refusée.

donc la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est $P(D\cap A)+P(\overline{D}\cap\overline{A})$.

Or d'après l'arbre, $P(D\cap A)=0{,}03\times0{,}03=0{,}0009$ et $P(\overline{D}\cap\overline{A})\ =0{,}0194$.

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est donc de 0,0009 + 0,0194 soit de 0,0203.

❹ La probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise est la probabilité que la pièce soit mauvaise (c'est-à-dire défectueuse) sachant qu'elle est acceptée à savoir $P_A(D)$.

Or $\quad P_A(D)=\dfrac{P(D\cap A)}{P(A)}$

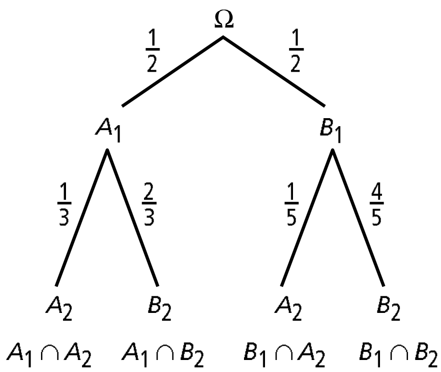
avec $P(A)=P(D\cap A)+P(\overline{D}\cap A)=0{,}0009+0{,}97\times 0{,}98=0{,}9515.$

Donc $P_A(D)=\dfrac{0{,}0009}{0{,}9515}\approx 0{,}000946.$ La probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise est d'environ 0,000946.

Exercice 6

❶ Résumons la situation par un arbre de probabilité. D'après l'énoncé :

$$p_1=P(A_1)=\frac{1}{2}\ ;\ P_{A_1}(A_2)=\frac{1}{3}\ ;\ P_{B_1}(B_2)=\frac{4}{5}$$



Les événements A_1 et B_1 forment une partition de Ω.

D'après la formule des probabilités totales :

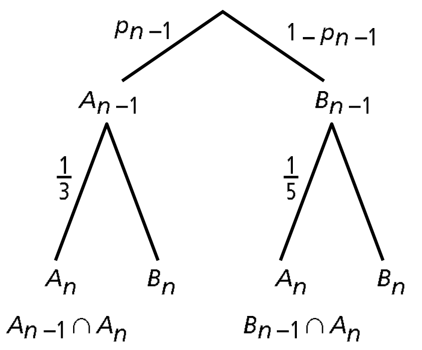
$$P(A_2)=P(A_2\cap A_1)+P(A_2\cap B_1)$$

$$P(A_2)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(A_2)$$

$$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

soit $p_2=\dfrac{4}{15}.$

❷ Les événements A_{n-1} et B_{n-1} forment une partition de Ω.



Donc

$$P(A_n)=P(A_n\cap A_{n-1})+P(A_n\cap B_{n-1})$$

$$p_n=P(A_n)=P(A_{n-1})\times P_{A_{n-1}}(A_n)+P(B_{n-1})\times P_{B_{n-1}}(A_n)$$

$$p_n=P(A_n)=p_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{5}$$

$$p_n=p_{n-1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}=\frac{2}{15}p_{n-1}+\frac{1}{5}$$

❸ Pour montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n en utilisant la définition de la suite (u_n) et la relation prouvée à la question précédente.

Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n.$$

Ainsi, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = \frac{2}{15}u_n$: la suite (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$.

❹ On en déduit $u_n = u_1 \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0$ car $0 < \frac{2}{15} < 1$,

$p_n = u_n + \frac{3}{13} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{13}$

Exercice 7

Soit A (resp. B, C, D) l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire A (resp. B, C, D) ».
Soit R l'événement : « l'élève arrive en retard ».

❶ $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C)$ car A, B, C et D forment une partition de l'univers.
Donc $P(D) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

❷ On cherche $P_R(C)$.

$$P_R(C) = \frac{P(R\cap C)}{P(R)}$$

Pour déterminer $P(R)$, on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(R\cap A) + P(R\cap B) + P(R\cap C) + P(R\cap D)$$

$$P(R) = P(A)\times P_A(R) + P(B)\times P_B(R) + P(C)\times P_C(R) + P(D)\times P_D(R)$$

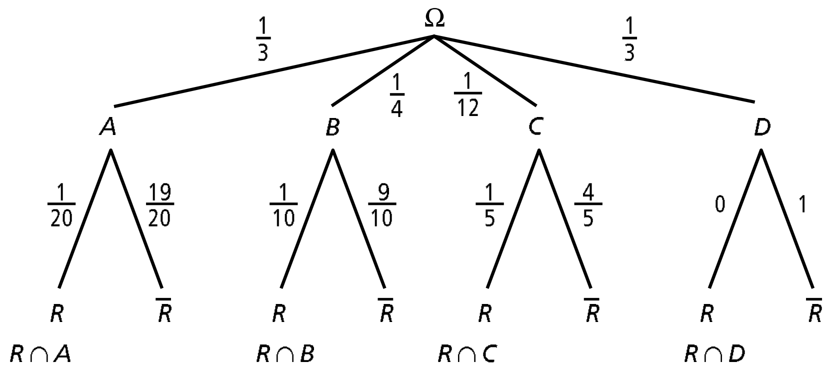
$$P(R) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times 0$$

$$P(R) = \frac{7}{120}$$

$$P_R(C) = \frac{P(R\cap C)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7}$$

Remarque

On peut s'aider d'un arbre pondéré pour calculer $P(R)$.



Exercice 8

❶ Désignons par E l'événement « la personne est en état d'ébriété » ;
T l'événement « l'alcootest se révèle positif ».

L'énoncé nous donne les résultats suivants :

$P(E) = 0{,}02$; $P_E(T) = 0{,}96$; $P_{\overline{E}}(T) = 0{,}01$.

On veut calculer $P_T(\overline{E})$.

On sait que : $P_T(\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E} \cap T)}{P(T)}$.

▶ Calcul de $P(\overline{E} \cap T)$.

On a $P(\overline{E} \cap T) = P_{\overline{E}}(T) \times P(\overline{E})$

$P(\overline{E} \cap T) = 0{,}01 \times 0{,}98$

$P(\overline{E} \cap T) = 0{,}009\,8$.

▶ Calcul de $P(T)$.

On a $T = (T \cap E) \cup (T \cap \overline{E})$.

Les événements $T \cap E$ et $T \cap \overline{E}$ sont incompatibles donc

$P(T) = P(T \cap E) + P(T \cap \overline{E})$.

Soit $P(T) = P_E(T) \times P(E) + P_{\overline{E}}(T) \times P(\overline{E})$

$P(T) = 0{,}96 \times 0{,}02 + 0{,}009\,8$

$P(T) = 0{,}029$.

On a donc $P_T(\overline{E}) = \dfrac{0{,}009\,8}{0{,}029} = 0{,}337\,9...$

La probabilité qu'une personne dont l'alcootest est positif ne soit pas en état d'ébriété est environ égale à 0,338.

La probabilité trouvée peut paraître surprenante car il y a environ une chance sur trois qu'une personne contrôlée positive ne soit pas en état d'ébriété !

Ce résultat est dû au faible taux (2 %) de conducteurs en état d'ébriété.

❷ Un raisonnement identique nous donne :

$$P_T(\bar{E}) = \frac{P(\bar{E} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\bar{E} \cap T)}{P(T \cap E) + P(T \cap \bar{E})}$$

$$P_T(\bar{E}) = \frac{0{,}95 \times 0{,}01}{0{,}96 \times 0{,}05 + 0{,}01 \times 0{,}95}$$

$$P_T(\bar{E}) = 0{,}165\ 2\ldots\ .$$

La probabilité des faux positifs est $P_T(\bar{E}) = 0{,}165$.

On fait de même pour les faux négatifs.

$$P_{\bar{T}}(E) = \frac{P(E \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(E \cap \bar{T})}{P(\bar{T} \cap E) + P(\bar{T} \cap \bar{E})}$$

$$P_{\bar{T}}(E) = \frac{0{,}05 \times 0{,}04}{0{,}05 \times 0{,}04 + 0{,}95 \times 0{,}99}$$

$$P_{\bar{T}}(E) = 0{,}002\ 1\ldots\ .$$

La probabilité des faux négatifs est $P_{\bar{T}}(E) = 0{,}002$.

La probabilité pour une personne dont l'alcootest est positif de ne pas être en état d'ébriété reste encore assez forte, bien qu'elle ait diminué de moitié environ (de 33 % à 16,5 %).
Par contre la probabilité pour une personne dont l'alcootest est négatif d'être en état d'ébriété est assez faible.
On observe que le test est plus fiable dans celui des deux cas où la probabilité p est la plus grande.

Exercice 9

Lorsque le logiciel de programmation utilisé ou la calculatrice le permet, on peut utiliser une seule boucle en faisant trier la liste des dates d'anniversaire. Il suffit alors de comparer chaque date à la suivante.

Variables
    dates : tableau des trente jours d'anniversaire
    trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident.
    k : un compteur de boucles.

Initialisation
    Pour k de 1 à 30
    | dates[k] prend une valeur entière aléatoire comprise entre 1 et 365 inclus
    Trier la liste du plus petit au plus grand
    trouvé prend la valeur faux

Traitement

Pour k de 1 à 29

Si dates[k] = dates[k+1] alors

trouvé prend la valeur vrai

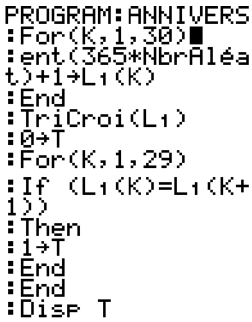
Sortie

Affiche trouvé

Le logiciel Algobox ne permet pas de trier de listes. Ci-dessous les programmes correspondant à l'algorithme précédent.

Casio

Texas Instrument



Exercice 10 L'expérience aléatoire est formée à partir de trois expériences aléatoires indépendantes. Elles ne sont pas identiques comme celles qui ont été utilisées en Première S, mais on procède de même : on utilise donc la loi de probabilité telle que la probabilité d'une liste de résultats soit le produit des probabilités des résultats partiels qui la constituent.

❶ On note U_C l'événement « on obtient 1 avec le dé cubique », U_O l'événement « on obtient 1 avec le dé octaédrique », U_D l'événement « on obtient 1 avec le dé dodécaédrique ».

On a $P(U)=P(U_C)\times P(U_O)\times P(U_D)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{576}=\frac{1}{9}.$

❷ Avec des notations analogues on a :

$P(Q)=P(Q_C)\times P(Q_O)\times P(Q_D)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{8}\times\frac{8}{12}=\frac{64}{576},$ soit environ une chance sur deux.

❸ Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un jeu.

La loi de probabilité de X est :

x_i	3	–1	0,01 x n
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{576}$	$\frac{64}{576}$	$1-\frac{1}{576}-\frac{64}{576}=\frac{511}{576}$

$$E(X)=3\times\frac{1}{576}-1\times\frac{64}{576}+0{,}01\times n\times\frac{5{,}11}{576}=\frac{5{,}11\,n-61}{576}.$$

Le jeu est favorable au joueur lorsque $E(X)>0$ ce qui équivaut à $5{,}11\,n-61>0$ c'est-à-dire $n>\frac{61}{5{,}11}$. Comme $\frac{61}{5{,}11}\approx 11{,}93$ la plus petite valeur de n est égale à 12.

Exercice 11 Le candidat répète 10 fois la même épreuve à 2 issues possibles :

S « le candidat répond correctement à la question posée » ; $P(S)=p=\frac{1}{3}$ puisque le candidat répond au hasard.

$\bar{S}$ « le candidat répond mal » ; $P(\bar{S})=1-P(S)=1-p=\frac{2}{3}$.

Les réponses à chaque question sont indépendantes.

On est donc en présence d'une suite de 10 épreuves de Bernoulli.

Soit X le nombre de réponses exactes. X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.

Pour être reçu, il faut répondre au moins à 8 questions. La probabilité d'être reçu est donc :

$P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$

$$=\binom{10}{8}\times\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{10}{9}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9\times\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{10}{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\left(45\times\frac{4}{9}+10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{67}{19\,683}\simeq 0{,}003.$$

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 4

Exercice I

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

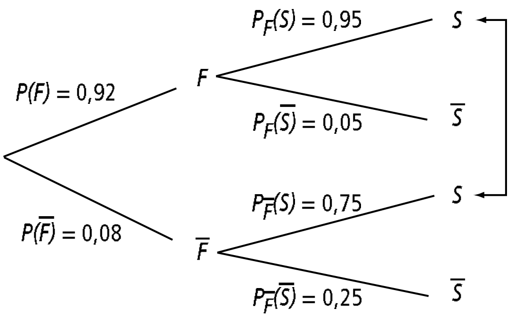
- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité ».

❶ Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Les données sont $P(F)=0{,}92$, $P_F(S)=0{,}95$ et $P\left(\overline{F}\cap\overline{S}\right)=0{,}02.$

b. On sait $P\left(\overline{F}\cap\overline{S}\right)=P\left(\overline{F}\right)\times P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)$, soit $0{,}02=0{,}08\times P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)$, donc $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\dfrac{1}{4}.$

c. On a aussi $P_{\overline{F}}(S)=1-P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=0{,}75$ et on peut construire l'arbre pondéré :



❷

a. On a $S=(F\cap S)\cup\left(\overline{F}\cap S\right)$ et , comme F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, on a :

$$\begin{aligned}P(S)&=P(F\cap S)+P\left(\overline{F}\cap S\right)\\&=P(F)\times P_F(S)+P\left(\overline{F}\right)\times P_{\overline{F}}(S)\\&=0{,}92\times0{,}95+0{,}08\times0{,}75\qquad \boxed{P(S)=0{,}934.}\end{aligned}$$

b. On cherche $P_S(F)$.

On a $P_S(F)=\dfrac{P(F\cap S)}{P(S)}=\dfrac{P(F)\times P_F(S)}{P(S)}=\dfrac{0,92\times 0,95}{0,934}\approx 0,936.$

❸ La variable aléatoire B prend les valeurs 10, 5 et 0.

$P(B=10)=P(F\cap S)=P(F)\times P_F(S)=0,92\times 0,95=0,874$;

$P(B=0)=P\left(\overline{S}\right)=1-P(S)=0,066$;

$P(B=5)=1-P(B=10)-P(B=0)=0,06.$

b_i	10	5	0
$P(B=b_i)$	0,874	0,06	0,066

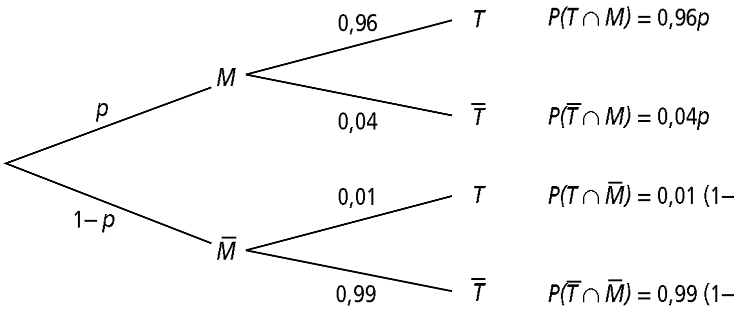
❹ Comme la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution du lot de 10 jouets puisse être assimilée à un tirage avec remise, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0,934)$.

On cherche $P(X\geq 8)$ et on a :

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$
$$=\binom{10}{8}0,934^8\times 0,066^2+\binom{10}{9}0,934^9\times 0,066+\binom{10}{10}0,934^{10}$$
$$P(X\geq 8)\approx 0,9328.$$

Exercice II

❶ Les données nous permettent de construire l'arbre pondéré.



❷ Déterminons $P_T(M)=\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}$.

On a $P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap \overline{M})$

$P(T)=0,96p+0,01(1-p)$

$P(T)=0,95p+0,01.$ D'où $\boxed{P_T(M)=\dfrac{0,96p}{0,95p+0,01}=\dfrac{96p}{95p+1}}.$

▶ Posons $f(p)=\dfrac{96p}{95p+1}=96\times\dfrac{p}{95p+1}$.

Déterminons la dérivée.

$f'(p)=96\times\dfrac{(95p+1)-95p}{(95p+1)^2}=\dfrac{96}{(95p+1)^2}$.

La fonction f est croissante sur [0 ; 1] car $f'(p)>0$.

p	0	1
$f(p)$	0 ↗	1

▶ Tableau de valeurs.

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
f(p)	0,087 7	0,325 4	0,492 3	0,662 1	0,834 8	0,914 3	0,96

❸

▶ Déterminons $P_{\overline{T}}(\overline{M})=\dfrac{P(\overline{T}\cap\overline{M})}{P(\overline{T})}$.

On a $P(\overline{T})=1-P(T)=1-(0{,}95p+0{,}01)$

$P(\overline{T})=-0{,}95p+0{,}99$.

D'où $\boxed{P_{\overline{T}}(\overline{M})=\dfrac{0{,}99(1-p)}{-0{,}95p+0{,}99}=\dfrac{99(1-p)}{99-95p}}$.

▶ Posons $g(p)=\dfrac{99(1-p)}{99-95p}$.

Déterminons la dérivée.

$g'(p)=\dfrac{99(-99+95p+95-95p)}{(99-95p)^2}=\dfrac{-4\times 99}{(99-95p)^2}$.

La fonction g est décroissante sur [0 ; 1] car $g'(p)<0$.

p	0	1
$g(p)$	1 ↘	0

▶ Tableau de valeurs.

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
g(p)	0,999 9	0,999 8	0,999 6	0,999 2	0,997 9	0,995 5	0,99

❹ On sait que $P_T(M)+P_T(\bar{M})=1$, d'où $P_T(\bar{M})=1-P_T(M)$.

Posons $h(p)=P_T(\bar{M})$.

D'où $h(p)=1-f(p)$.

Comme la fonction f est croissante sur [0 ; 1], h est décroissante sur [0 ; 1].

p	0		1
$h(p)$	1	$\searrow$	0

► Tableau de valeurs.

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$h(p)$	0,912 3	0,674 6	0,507 7	0,337 9	0,165 2	0,085 7	0,04

❺ On sait que $P_{\bar{T}}(M)+P_{\bar{T}}(\bar{M})=1$, d'où $P_{\bar{T}}(M)=1-P_{\bar{T}}(\bar{M})$.

Posons $k(p)=P_{\bar{T}}(M)$.

D'où $k(p)=1-g(p)$.

Comme la fonction g est décroissante sur [0 ; 1], k est croissante sur [0 ; 1].

p	0		1
$k(p)$	0	$\nearrow$	1

► Tableau de valeurs.

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$k(p)$	0,000 04	0,000 2	0,000 4	0,000 8	0,002 1	0,004 5	0,01

❻ Quelques commentaires

Probabilité conditionnelle	$P_T(M)$	$P_{\bar{T}}(\bar{M})$	$P_T(\bar{M})$ (faux positifs)	$P_{\bar{T}}(M)$ (faux négatifs)
Fonction	f	g	$h=1-f$	$k=1-g$
Variations de la fonction	croissante sur $I=[0;0,2]$	décroissante sur I	décroissante sur I	croissante sur I
Valeurs prises	de 0 à 0,96	toujours proches de 1	de 1 à 0,04	toujours proches de 0

On remarque tout d'abord que la valeur diagnostique du test n'est pas une notion intrinsèque au test lui-même : elle varie fortement suivant la probabilité p qui dépend de la population ciblée.

Si la population est une population à risque, p n'est pas faible et il n'y a pas trop de « faux positifs » ; la positivité du test sera donc un élément important du diagnostic. Par contre, pour une maladie rare, un test de dépistage systématique de toute une population aura l'inconvénient majeur de fournir beaucoup de faux positifs. Le nombre des personnes non malades dont le test est positif et, pour la société, le prix des tests de dépistage systématique, sont des problèmes éthiques et économiques liés à la mise en place de tels tests.

Autres remarques

- Les probabilités conditionnelles $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ varient en sens contraires.
- $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ est toujours proche de 1, ce qui est rassurant.
- La probabilité qu'une personne soit malade alors que le test est négatif, $P_{\overline{T}}(M)$, est donc toujours proche de 0.

Exercice III

❶ Le mathou n'ayant aucune mémoire, les essais successifs sont modélisés par la succession d'épreuves répétées et indépendantes, et pour chacune d'elles on utilise la loi équirépartie. On a donc :

a. $P(X=1)=\dfrac{1}{6}$,

b. $P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$,

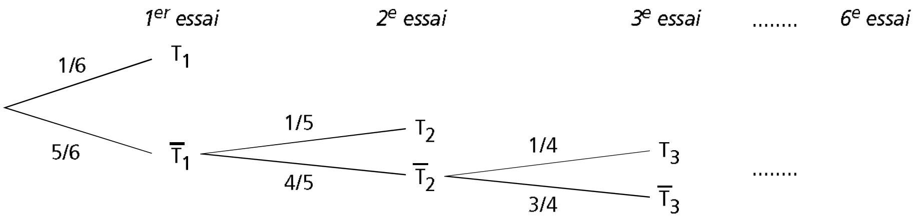
c. $P(X=6)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^5\times\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5^5}{6^6}\approx 0{,}067.$

d. $P(X\le 6)=1-P(X>6)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}665$ car $P(X>6)$ est la probabilité que le mathou pousse une mauvaise porte à chacun des six essais.

❷ On note T_n l'événement « le mathou trouve le fromage au n-ième essai ».

Comme le mathou a une mémoire parfaite, s'il ne trouve pas le fromage le nombre de portes entre lesquelles il va choisir diminue de 1 à chaque essai.

On obtient l'arbre suivant :



Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont donc 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Avant même de trouver la loi de Y, on peut donc savoir que $P(Y \le 6) = 1$, en effet le mathou fait six essais au maximum.

On trouve $P(Y=1) = \frac{1}{6}$, $P(Y=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$, $P(Y=3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$, $\ldots$, $P(Y=6) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$.

La loi de la variable aléatoire Y est donc la loi équirépartie.

❸ Pour tester l'hypothèse selon laquelle les mathoux ont une mémoire, on peut faire faire un très grand nombre d'essais à plusieurs mathoux et calculer la fréquence de découverte du fromage en au plus six essais. Si cette fréquence est très proche de 0,67, on en déduira que les mathoux n'ont aucune mémoire, si cette fréquence est proche de 1, on en déduira que ces animaux ont une excellente mémoire.

Exercice IV

❶ On rencontre une personne par hasard, on utilise donc la loi équirépartie sur l'univers formé par l'ensemble des dates d'une année. L'événement A « avoir la même date d'anniversaire que vous » contient une seule éventualité et donc $P(A) = \frac{1}{365} \approx 2{,}7 \times 10^{-3}$.

❷ Si les personnes sont plus nombreuses que les jours de l'année, il y a nécessairement plusieurs personnes dont les dates d'anniversaire coïncident. En tenant compte du 29 février, on trouve qu'à partir de 367 personnes on est sûr qu'il y a plusieurs anniversaires à la même date, la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est donc égale à 1.

❸ Nommons ces 30 enfants $e_1, e_2, \ldots, e_{30}$.

Soit $D_{1\text{et}2}$ l'événement « les enfants e_1 et e_2 ont des dates d'anniversaire différentes ». On a $P(D_{1\text{et}2}) = 1 - P(A) = \frac{364}{365} \approx 0{,}997$ car 2011 n'est pas une année bissextile.

Soit $D_{1\text{et}2\text{et}3}$ l'événement « les enfants e_1, e_2 et e_3 ont des dates d'anniversaire différentes ».

D'où $P\left(D_{1\text{et}2\text{et}3}\right) = P\left(D_{1\text{et}2}\right) \times \frac{363}{365}$ car la probabilité que la date d'anniversaire du troisième enfant soit différente des deux premières sachant que les deux premières sont différentes est égale à $\frac{363}{365}$ car les deux dates d'anniversaire des deux premiers enfants sont exclues.

On a donc $P\left(D_{1\text{et}2\text{et}3}\right)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}$.

On obtient de même que $P\left(D_{1\text{et}2\text{et}3\text{et}4}\right)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}$.

En appelant D l'événement « les anniversaires des 30 enfants sont tous à des dates différentes » on obtient

$$P(D)=\overbrace{\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{336}{365}}^{30-1=29\text{ fractions}}.$$

Calcul de $P(C)$

L'événement C « deux anniversaires au moins coïncident » est l'événement contraire de l'événement D

donc $P(C)=1-P(D)=1-\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{336}{365}$.

❹ Pour calculer cette probabilité et déterminer l'entier N, on peut utiliser les algorithmes suivants :

Calcul de $P(C)$	Détermination de N

Variables
  k : compteur de boucles ;
  n : un entier naturel ;
  p : un nombre réel compris entre 0 et 1.
Initialisation
  $p=1$
  $n=$ nombre de personnes du groupe
Traitement
  Pour k de 1 à $n-1$
    mettre $p\times\frac{365-k}{365}$ dans p
Sortie
  Afficher $1-p$
	Variables
	  k : compteur de boucles ;
	  N : un entier naturel ;
	  p : un nombre réel compris entre 0 et 1.
	Initialisation
	  $p=1$
	Traitement
	  Pour k de 1 à 367
	    Tant que $p<0{,}5$
	    mettre $p\times\frac{365-k}{365}$ dans p
	  $N=k$
	Sortie
	  Afficher N

On peut utiliser un tableur de la façon suivante.

On a rempli les colonnes A, B et C ; dans la cellule D2, on a recopié C2, c'est-à-dire la fraction $\frac{364}{365}\approx 0{,}997$, dans la cellule D3 on a rentré la formule D2*C3 c'est-à-dire $\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}$, et on l'a recopiée ce qui permet d'obtenir $\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{336}{365}$ dans la cellule D30. La colonne E donne donc les probabilités de rencontrer au moins une coïncidence de dates d'anniversaire en fonction du nombre de personnes du groupe.

D3 f_x =D2*C3

anniversaire

	A	B	C	D	E
1	k = nombre de personnes	365 - k	(365 - k)/365	*P(D)* =	*P(C)* = 1 - *P(D)*
2	2	364	0,997260274	0,99726027	0,002739726
3	3	363	0,994520548	0,99179583	0,008204166
4	4	362	0,991780822	0,98364409	0,016355912
22	22	344	0,942465753	0,52430469	0,475695308
23	23	343	0,939726027	0,49270277	0,507297234
24	24	342	0,936986301	0,46165574	0,538344258
25	25	341	0,934246575	0,4313003	0,568699704
26	26	340	0,931506849	0,40175918	0,59824082
27	27	339	0,928767123	0,37314072	0,626859282
28	28	338	0,926027397	0,34553853	0,654461472
29	29	337	0,923287671	0,31903146	0,680968537
30	30	336	0,920547945	0,29368376	0,706316243

Pour 30 enfants, on trouve $P(C) \approx 0{,}706$.

La probabilité $P(C)$ dépasse 0,5 à partir de $N=23$.

■