D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 On considère une expérience aléatoire dont l'univers est :

$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

On s'intéresse aux événements :

$A =$ "on a une issue multiple de 3", $B =$ "on a une issue multiple de 5",

et $C =$ "on a une issue de numéro ≥ 7".

❶ L'événement $A \cap B$ est :

☐ a.« multiples de 15 » ☐ b. $\varnothing$ ☐ c. $\{3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10\}$ ☐ d. « multiples de 8 »

❷ L'événement $B \cup C$ est :

☐ a. $\{10\}$ ☐ b. $\varnothing$ ☐ c. $\{5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$ ☐ d.n'existe pas

❸ L'événement $\overline{C}$ est :

☐ a.« numéro > 7 » ☐ b.« numéro ≤ 7 » ☐ c.« numéro < 7 » ☐ d. $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

Exercice 2 ❶ On considère un événement A tel que $p(A) = 0{,}5$. On peut en déduire que $p(\overline{A}) =$:

☐ a. 0,5 ☐ b. 0 ☐ c. 1 ☐ d. $1 - p(A)$

❷ On considère deux événements A et B. On peut avoir $p(A) + p(B) =$:

☐ a. 1 ☐ b. 1,6 ☐ c. 2,2 ☐ d. 0,2

Exercice 3 ❶ Pour un événement quelconque A, on a $A \cap \overline{A} = \varnothing$:

☐ Vrai ☐ Faux

❷ Pour un événement quelconque A, on a $A \cup \overline{A} = \varnothing$:

☐ Vrai ☐ Faux

❸ Si deux événements A et B sont tels que $p(A) = 0{,}7$ et $p(B) = 0{,}6$, on a $B = \overline{A}$:

☐ Vrai ☐ Faux

❹ Pour deux événements quelconques A et B, on a $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$:

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 4 On tire en même temps deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

❶ On considère l'événement « avoir deux cœurs ».

L'événement contraire est l'événement « ne pas avoir de cœur » :

☐ Vrai ☐ Faux

❷ On considère les événements « avoir deux cœurs » et « avoir deux as ».

Ces deux événements sont incompatibles, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucune issue commune :

☐ Vrai ☐ Faux

❸ On considère les événements « avoir deux cœurs » et « avoir deux figures ».

Ces deux événements sont incompatibles, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucune issue commune :

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 5

Alice a dessiné le contour d'un drapeau tricolore, et veut le colorier avec les couleurs noir, jaune et rouge. Elle choisit au hasard l'un des trois crayons pour colorier le rectangle situé près du mat du drapeau, puis choisit, encore au hasard, l'un des deux crayons restant pour colorier le rectangle du milieu, et termine avec le troisième crayon.

❶ Décrire l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

Quelle est la probabilité d'avoir le drapeau de la Belgique ?

❷ Quelle est la probabilité d'avoir le rectangle jaune au milieu du drapeau ?

❸ Quelle est la probabilité d'avoir le noir et le rouge l'un à côté de l'autre ?

Exercice 6

Alice et Bob joue au jeu de « pierre, feuille, ciseaux ». Dans ce jeu, au signal donné, chacun des deux joueurs tend la main vers l'autre en la mettant en forme de pierre (poing fermé), de feuille (main à plat) ou de ciseaux (deux doigts tendus en forme de V).

Les ciseaux l'emportent sur la feuille (qu'ils coupent), la feuille l'emporte sur la pierre (qu'elle enveloppe) et la pierre l'emporte sur les ciseaux (qu'elle casse). Il y a match nul si les deux joueurs montrent la même figure.

On suppose que les deux joueurs choisissent au hasard la figure qu'ils vont montrer.

❶ Décrire l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité d'avoir match nul ?

❸ Quelle est la probabilité que Bob gagne ?

Exercice 7

Dans un jeu de plateau, les combats sont réglés en lançant deux dés : un dé à quatre faces, une rouge, une jaune, une bleue et une noire, et un dé à six faces, une rouge, deux jaunes et trois noires.

Le joueur qui lance les dés gagne le combat s'il obtient deux faces rouges, fait match nul s'il obtient deux faces de même couleur autre que rouge, et perd le combat dans tous les autres cas.

On suppose les dés bien équilibrés.

❶ Décrire l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne le combat (événement noté G) ?

❷ Quelle est la probabilité que le joueur fasse match nul (événement noté Nul) ?

❸ Quelle est la probabilité d'avoir au moins une face jaune (événement noté J) ? Au moins une face bleue (événement noté B) ?

❹ Quelle est la probabilité des événements $Nul \cap J$ et $Nul \cup J$?

❺ Quelle est la probabilité des événements $G \cap J$ et $G \cup J$?

❻ Quelle est la probabilité des événements $Nul \cap B$ et $Nul \cup B$?

Exercice 8 Dans une boîte se trouvent une boule blanche, deux boules rouges, et deux boules noires.

On tire une boule au hasard dans la boîte, on la remet, et on en tire au hasard une deuxième. On s'intéresse aux deux couleurs tirées, dans l'ordre.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer deux boules de même couleur (événement D) ?

❸ Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire (événement N) ?

❹ Quelle est la probabilité des événements $\overline{D}$, $\overline{N}$, $D \cap N$ et $D \cup N$?

❺ Les décrire par une phrase.

Exercice 9 Dans une boîte se trouvent une boule blanche, deux boules rouges, et deux boules noires.

On tire une boule au hasard dans la boîte et, sans la remettre, on en tire au hasard une deuxième. On s'intéresse aux deux couleurs tirées, dans l'ordre.

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Quelle est la probabilité de tirer deux boules de même couleur (événement D) ?

❸ Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire (événement N) ?

❹ Quelle est la probabilité des événements $\overline{D}$, $\overline{N}$, $D \cap N$ et $D \cup N$?

❺ Les décrire par une phrase.

6 Exercices d'approfondissement

Exercice I

Dans une boîte se trouvent cinq cartes sur lesquelles sont marqués les nombres -5 ; -3 ; 1 ; 2 ; 6.

On tire une carte au hasard dans la boîte, on la remet dedans, et on en tire au hasard une deuxième. On s'intéresse aux deux événements :

S = " la somme des deux nombres est positive " et

P = " le produit des deux nombres est positif ".

❶ Déterminer l'univers et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Calculer les probabilités des événements S, P, $S \cap P$, et $S \cup P$.

❷ Reprendre ces questions si l'on ne remet pas la première carte tirée dans la boîte avant de tirer la deuxième.

Exercice II

Dans un porte-monnaie se trouvent une pièce de 2 €, une pièce de 1 € et deux pièces de 50 centimes d'Euro que l'on peut différencier (par exemple de deux pays distincts).

On prend au hasard une pièce dans le porte-monnaie, puis, sans la remettre dedans, on prend, encore au hasard, une deuxième pièce.

❶ Décrire tous les tirages possibles, en tenant compte de l'ordre dans lequel on a pris les pièces, et la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

❷ Calculer la probabilité d'avoir deux pièces de même valeur.

❸ Calculer la probabilité d'avoir deux pièces de même couleur (les pièces de 1 € et 2 € sont de même couleur).

❹ Calculer la probabilité d'avoir deux pièces de couleurs différentes.

❺ Calculer la probabilité d'avoir une somme de 1 €.

❻ Calculer la probabilité d'avoir une somme de 2 €.

❼ Calculer la probabilité d'avoir une somme supérieure ou égale à 1,50 €.

Exercice III

Dans une première boîte se trouvent huit boules dont une blanche. Dans une deuxième boîte se trouvent six boules dont une blanche.

Un jeu consiste à lancer une pièce équilibrée, puis à tirer au hasard une boule dans la première boîte si l'on a obtenu Pile, ou dans la deuxième boîte si l'on a obtenu Face.

❶ Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.

❷ En déduire la probabilité de tirer une boule blanche.

Exercice IV

Alice écoute un CD de 12 titres sur lequel 2 titres sont ses préférés. Elle utilise le mode aléatoire, c'est-à-dire un mode de lecture où chaque titre est choisi au hasard parmi ceux qui n'ont pas encore été écoutés (un titre ne peut donc pas être rejoué tant que les 12 titres n'ont pas été joués).

❶ Quelle est la probabilité que le premier titre soit l'un de ses préférés ?

❷ Si le premier titre n'est pas l'un de ses préférés, quelle est la probabilité que le premier titre suivant soit l'un de ses préférés ?

❸ On s'intéresse aux trois premiers titres joués, et au fait que chacun soit ou non l'un des préférés d'Alice. A l'aide d'un arbre pondéré, représenter cette expérience aléatoire et déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un des titres préférés d'Alice parmi ces trois titres.

❹ Bob prétend à Alice qu'avec un lecteur MP3 sur lequel seraient enregistrés 10 albums de 12 titres, elle aurait plus de chances d'avoir un de ses titres préférés parmi les trois premiers écoutés.

On suppose qu'Alice a 2 titres préférés par album, et qu'elle écouterait sa musique avec le même mode aléatoire avec un lecteur MP3.

Si Alice suit le conseil de Bob, quelle est la probabilité que le premier titre écouté soit l'un de ses préférés ?

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un de ses titres préférés parmi les trois premiers titres joués ?

Que pensez-vous du conseil de Bob ?

Exercice V

On lance trois dés tétraédriques normaux et on note la somme des trois numéros.

❶ Décrire l'ensemble des issues possibles. Y a-t-il équiprobabilité ?

❷ A l'aide d'une simulation, sur calculatrice ou tableur, de 500, 1000 et 5000 répétitions de l'expérience, déterminer une approximation de la loi de probabilité.

Exercice VI

On veut répondre à la question suivante : quand on prend au hasard deux points sur un segment de longueur 1, quelle est la probabilité que la distance entre ces deux points soit supérieure à 0,5.

❶ A l'aide d'un tableur, simuler le tirage aléatoire de deux points d'abscisse comprise entre 0 et 1, et calculer leur distance.

❷ Sur la même feuille de calcul, simuler 100 tirages, 300, 500.

Pour chaque simulation, déterminer la fréquence des tirages donnant une distance supérieure à 0,5.

Estimer alors la probabilité cherchée.