LES RACINES CARREES

1°) Définition.

Soit a un nombre positif non nul.

On appelle racine carrée de a, et on note $\sqrt{a}$, le nombre dont le carré fait a.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$$

Exemples :

$$\sqrt{4} = 2\,;\ \sqrt{1} = 1\,;\ \sqrt{0} = 0\,;\ \sqrt{81} = 9\,;\ \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

Tous les nombres positifs ont une racine carrée, souvent, on ne peut en donner qu'une valeur approchée.

Exemple : $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135\ \ldots$

valeur exacte valeur approchée

important : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Remarque : les nombres dont la racine carrée est un entier s'appellent des **carrés parfaits**
(exemples : 1; 4; 144;… sont des carrés parfaits)

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle : le radical.

2°) Simplification d'une racine.

On utilise $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples : simplifie les racines suivantes.

$$A = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Simplifier une racine veut dire retirer tout ce que l'on peut en dessous de la racine, en faisant apparaitre, quand c'est possible, des carrés parfaits.

$$B = \sqrt{98} = \sqrt{2 \times 49} = \sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2} \times 7 = 7\sqrt{2}$$

$$C = 3\sqrt{72} = 3\sqrt{3 \times 24} = 3\sqrt{3 \times 3 \times 8} = 3 \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{8} = 3 \times 3 \times \sqrt{2 \times 4} = 9 \times \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 9 \times \sqrt{2} \times 2 = 18\sqrt{2}$$

Ou bien, plus rapide :

$$C = 3\sqrt{72} = 3\sqrt{36 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

3°) Règles de calcul

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}} \quad ; \quad \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} \quad ; \quad \boxed{a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}}$$

Exemples :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{288}{2}} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{36 \times 64} = \sqrt{36} \times \sqrt{64} = 6 \times 8 = 48$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \times 7} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{63}$$

4°) Simplification d'expressions

Cas n°1 :

$A = \sqrt{50} - 3\sqrt{98} + 2\sqrt{8}$
$A = \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{49 \times 2} + 2\sqrt{4 \times 2}$
$A = \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 3 \times \sqrt{49} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
$A = 5\sqrt{2} - 3 \times 7 \times \sqrt{2} + 2 \times 2 \times \sqrt{2}$
$A = 5\sqrt{2} - 21\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$
$A = -12\sqrt{2}.$

Cas n°2 : quand on a une racine carrée au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine carrée du dénominateur.

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$A = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$
$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$
$B = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$
$B = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 3}$
$B = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$C = \sqrt{\frac{2}{5}}$
$C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
$C = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$
$C = \frac{\sqrt{10}}{5}$

5°) Développements d'expressions

Rappel : on connait trois identités remarquables :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

On sait aussi développer un produit de type $(a+b)(c+d)$.

Exemples :

$A = (2\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$A = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{2} - 1\sqrt{3}$

$A = \quad 2\sqrt{6} \quad - \quad 6 \quad + \quad \sqrt{2} \quad - \quad \sqrt{3}$

$A = -6 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

$B = (\sqrt{2} + 5\sqrt{10})(\sqrt{5} - 4\sqrt{2})$

$B = \sqrt{2} \times \sqrt{5} - \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} + 5\sqrt{10} \times \sqrt{5} - 5\sqrt{10} \times 4\sqrt{2}$

$B = \quad \sqrt{10} \quad - \quad 8 \quad + \quad 5\sqrt{50} \quad - \quad 20\sqrt{20}$

$B = \sqrt{10} - 8 + 5\sqrt{25 \times 2} - 20\sqrt{4 \times 5}$

$B = \sqrt{10} - 8 + 25\sqrt{2} - 40\sqrt{5}$

$C = (\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$ c'est une identité remarquable

$C = (\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2$

$C = 5 - 4 \times 3$

$C = 5 - 12$

$C = -7$

$D = (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2$ c'est une identité remarquable

$D = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2$

$D = 2 + 6\sqrt{6} + 9 \times 3$

$D = 2 + 6\sqrt{6} + 27$

$D = 29 + 6\sqrt{6}$

$E = (2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})^2$

$E = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2$

$E = 4 \times 5 - 20\sqrt{10} + 25 \times 2$

$E = 20 - 20\sqrt{10} + 50$

$E = 70 - 20\sqrt{10}$.