Exercices corrigés par animation

http://manuel.sesamath.fr

1 Recopie et complète.

$\sqrt{0} = \dots$ $\quad \sqrt{81} = \dots$ $\quad \sqrt{7{,}3^2} = \dots$ $\quad \sqrt{\dots} = 4$ $\quad \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi} = \dots$ $\quad \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \dots$ $\quad \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dots$

2 Calcule et donne le résultat sous forme d'un nombre décimal.

$A = \sqrt{4}$ $\quad B = \sqrt{25}$ $\quad C = \left(-\sqrt{4{,}9}\right)^2$ $\quad D = \sqrt{(-7)^2}$ $\quad E = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$

3 À l'aide de la calculatrice, donne l'écriture décimale exacte ou approchée à 0,001 près par défaut des nombres suivants :

$F = \sqrt{3}$ $\quad G = \frac{\sqrt{529}}{23}$ $\quad H = 5\sqrt{0{,}81}$ $\quad I = \sqrt{3 + \frac{2}{3}}$ $\quad J = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{5}}$

4 Dresse la liste des douze premiers carrés parfaits.

5 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible, les nombres : $F = \sqrt{63}$; $G = \sqrt{147}$; $H = 3\sqrt{700}$ et $I = \frac{\sqrt{175}}{5}$.

6 Simplifie $D = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ puis écris $F = \sqrt{\frac{15}{45}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

7 Réduis les sommes : $C = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7}$ et $D = 11\sqrt{5} - 25\sqrt{5} + 14\sqrt{5}$.

8 Écris $E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$ et $F = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

9 Résous les équations :
- $x^2 = 121$
- $x^2 = 18$
- $4x^2 = 9$
- $x^2 + 9 = 5$

10 Résous l'équation $(x + 2)^2 = 1$.

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.

Définition

1 *Un peu de vocabulaire*

Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.

a. 49 est le carré de 7.

b. 8 a pour carré 64.

c. – 9 a pour carré – 81.

d. 144 est le carré de – 12.

e. $(-3)^2$ est le carré de 3.

2 *Nombre ayant pour carré*

Écris chaque nombre sous la forme du carré d'un nombre positif.

a. 16 **d.** 0,36

b. 25 **e.** 1

c. 0 **f.** 0,04

3 Recopie et complète les phrases suivantes.

a. $4 = \ldots^2$, ... est positif donc $\sqrt{4} = \ldots$

b. $\ldots = 6^2$, ... est positif donc $\sqrt{\ldots} = 6$.

c. $0{,}01 = \ldots^2$, ... est positif donc $\sqrt{0{,}01} = \ldots$

d. $\ldots = 0{,}5^2$, ... est positif donc $\sqrt{\ldots} = 0{,}5$.

e. $121 = \ldots^2$, ... est positif donc $\sqrt{121} = \ldots$

4 Les nombres suivants ont-ils une racine carrée ? Si oui, laquelle ?

a. 100 **e.** 169

b. 9 **f.** – 1

c. – 36 **g.** – 52

d. $(-8)^2$ **h.** π

5 Peux-tu déterminer la racine carrée des nombres suivants ? Justifie ta réponse.

a. $\left(\sqrt{8}\right)^2$ **d.** $-2 \times (-5)^2$

b. $\sqrt{5}$ **e.** $\pi - 4$

c. $\dfrac{-5}{-7}$ **f.** 5×10^{-2}

g. $4 - \pi$

6 Sans utiliser de calculatrice, donne la valeur des nombres suivants.

a. $\left(\sqrt{25}\right)^2$ **d.** $\left(\sqrt{0{,}14}\right)^2$

b. $\sqrt{3^2}$ **e.** $\sqrt{(-7)^2}$

c. $\left(-\sqrt{16}\right)^2$ **f.** $\sqrt{0{,}4^2}$

7 Sans utiliser de calculatrice, donne la racine carrée des nombres suivants.

a. 81 **e.** 0,49

b. 225 **f.** 121

c. 0 **g.** $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$

d. $\sqrt{81}$ **h.** $(-4)^2$

8 Sans utiliser de calculatrice, recopie et complète le tableau ci-dessous ($a \geqslant 0$).

a	a^2	$2a$	$\dfrac{a}{2}$	$\sqrt{a}$
9				
	16			
		2		
			1	
				6

9 On considère les trois séries de nombres suivantes.

S_1 : 16 ; 4 ; 8 ; 32 ; 256.

S_2 : 12,5 ; 625 ; 50 ; 5 ; 25.

S_3 : 72 ; 288 ; 20 736 ; 12 ; 144.

a. Dans un tableau similaire à celui de l'exercice précédent, place les trois séries de nombres dans les bonnes cases.

b. Trouve une quatrième série S_4 où le nombre 7 sera à placer dans une des colonnes.

10 En utilisant la calculatrice, donne la valeur arrondie au centième des nombres suivants.

a. $\sqrt{13}$ **e.** $5\sqrt{12}$

b. $\sqrt{86}$ **f.** $\sqrt{5} + 2$

c. $\sqrt{0{,}288}$ **g.** $-\sqrt{7}$

d. $\sqrt{4 + \dfrac{2}{3}}$ **h.** $\dfrac{3 - \sqrt{7}}{3\sqrt{15} + 1}$

Simplification de racines

11 Écris sous la forme $\sqrt{a}$ (a est un entier positif).

a. $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$ **c.** $2\sqrt{3}$ **d.** $3\sqrt{2}$

12 *Des carrés*

a. Écris sous la forme $\sqrt{a}$ (a est un entier positif).

$A=\sqrt{8}\times\sqrt{5}$ $B=3\sqrt{11}$

b. Sans effectuer de calcul, donne les valeurs exactes de A^2 et de B^2.

13 Donne la valeur exacte des expressions.

a. $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$

b. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

c. $\left(2\sqrt{3}\right)^2$

d. $\sqrt{4{,}5}\times\sqrt{2}$

e. $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{14}}$

f. $\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

14 Écris sans radical les expressions.

a. $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

b. $\sqrt{\dfrac{1}{16}}$

c. $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$

d. $\dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{49}{64}}$

15 *En décomposant*

a. Recopie et complète les égalités suivantes afin d'obtenir un produit de deux entiers positifs dont le premier est un carré parfait.

- $32 = \ldots \times 2$
- $500 = \ldots \times 5$
- $75 = \ldots \times \ldots$
- $80 = \ldots \times \ldots$

b. Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.

- $\sqrt{32}$
- $\sqrt{500}$
- $\sqrt{75}$
- $\sqrt{80}$

16 Écris sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.

a. $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ **b.** $\sqrt{7}\times\sqrt{21}$

17 Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs et b est le plus petit possible.

a. $\sqrt{45}$

b. $\sqrt{162}$

c. $-\sqrt{48}$

d. $5\sqrt{18}$

e. $-4\sqrt{32}$

f. $2\times\sqrt{700}\times 8$

18 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

a. $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$

b. $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

c. $\sqrt{7}\times 3\sqrt{14}$

d. $7\sqrt{2}\times 5\sqrt{70}$

19 Sans utiliser de calculatrice, transforme les expressions suivantes de façon à obtenir une fraction irréductible.

a. $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{75}}$ **b.** $\dfrac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}$ **c.** $\sqrt{\dfrac{28}{42}}\times\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$

20 *Somme et différence de racines carrées*

a. On considère la somme $A=\sqrt{36}+\sqrt{64}$. Calcule A.

b. On considère l'expression $B=\sqrt{100}$. Calcule B.

c. Que peux-tu en conclure ? Justifie ta réponse.

d. Trouve un exemple similaire pour la différence de deux racines carrées.

e. Que peux-tu déduire des deux exemples précédents ?

21 Écris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{2}$ ou $a\sqrt{3}$, où a est un entier relatif.

$A=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$B=7\sqrt{3}-9\sqrt{3}$

$C=\sqrt{3}-8\sqrt{3}+15\sqrt{3}$

$D=3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$E=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$F=5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

22 *En deux temps*

a. Écris $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$ et $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont entiers et b le plus petit possible.
Réduis l'expression $G=\sqrt{50}+\sqrt{18}-2\sqrt{8}$.

b. En raisonnant de façon identique, réduis l'expression $H=\sqrt{12}-7\sqrt{27}+\sqrt{3}$.

23 Écris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

$A = \sqrt{8} + 7\sqrt{2}$	$C = 2\sqrt{3} - \sqrt{75}$
$B = \sqrt{5} - \sqrt{20}$	$D = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 3\sqrt{18}$

24 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec b le plus petit possible.

$A = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 7\sqrt{8}$	$C = \sqrt{12} + \sqrt{75} + 4\sqrt{300}$
$B = \sqrt{20} - 8\sqrt{45} + 2\sqrt{5}$	$D = 5\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{7}$

25 Écris sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers relatifs avec c le plus petit possible.

$A = 7 - \sqrt{12} - 8 + 3\sqrt{27}$

$B = 3\sqrt{50} - \sqrt{49} + 2\sqrt{8}$

$C = 2\sqrt{18} + \sqrt{16} - 7\sqrt{81}$

26 *Extrait du Brevet*

a. Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a entier.

$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$ $\qquad B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$

b. En utilisant les résultats de la question **a.**, démontrer que $A \times B$ et $\dfrac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

27 Écris les quotients suivants avec un dénominateur entier.

a. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **b.** $\dfrac{7}{2\sqrt{5}}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ **d.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

28 Écris les quotients suivants sans radical au dénominateur.

a. $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ **c.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{8}}$

b. $\dfrac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ **d.** $\dfrac{\sqrt{7} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$

29 *Extrait du Brevet*

Soit $D = \dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$.

Montrer que D est un nombre entier.

Avec Pythagore

30 *Théorème de Pythagore*

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a. Calcule la valeur exacte de la longueur du côté [BC] sachant que AB = 5 cm et AC = 7 cm.

b. Calcule la valeur exacte de la longueur du côté [AB] sachant que AC = 6 m et BC = 11 m.

31 *Théorème de Pythagore (bis)*

EDF est un triangle rectangle en F.
On donne $ED = 5\sqrt{2}$ cm et $DF = 3\sqrt{2}$ cm.

a. Détermine la valeur exacte de EF.
Tu donneras le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier positif.

b. Donne la valeur exacte du périmètre du triangle EDF puis l'arrondi au millimètre.

32 *Rectangle ou non rectangle ?*

Dans chaque cas, détermine si le triangle GHI est rectangle ou non. Justifie ta réponse.

a. GH = 5 dm ; GI = 7 dm et $HI = \sqrt{74}$ dm.

b. $GH = \sqrt{13}$ m ; $HI = \sqrt{12}$ m et GI = 6 m.

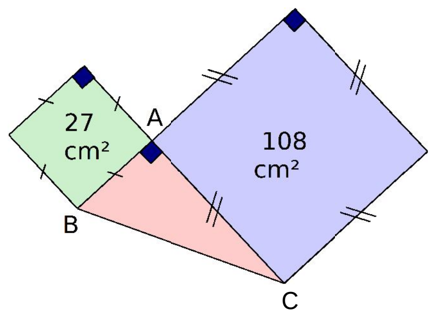
33 Soit un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 4 cm. A est un point de ($\mathscr{C}$), B est le symétrique de A par rapport à O.
Soit M un point de ($\mathscr{C}$) tel que AM = 3 cm.

a. Construis une figure en vraie grandeur.

b. Calcule la valeur exacte de BM.

34 *Un petit calcul d'aire*

En utilisant les données de la figure, détermine l'aire du triangle ABC.
(Les proportions ne sont pas respectées.)



En lien avec la géométrie

35 Trace un carré ABCD de côté 1 cm.

a. Calcule la valeur exacte de la longueur AC.

b. Place le point E sur [AB] tel que AE = 3 × AB. Construis ensuite le carré AEGH de telle sorte que D soit un point de [AH].
Calcule la valeur exacte de la longueur AG.

c. Montre que AG est un multiple de AC.

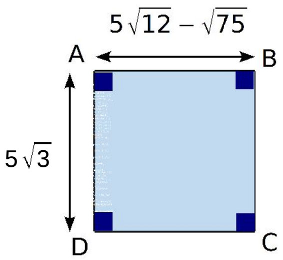
d. Place le point F sur [EG] de telle sorte que AEFD soit un rectangle.
Calcule la longueur exacte de AF.

e. Place sur [AG] le point P tel que AP = AF.
La longueur de [AP] est-elle un multiple de celle de [AC] ?

f. Prouve que CG = $\sqrt{8}$ cm.

g. Compare $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ et $\sqrt{10}$. (Utilise l'un des symboles =, < ou >.)

36 On considère la figure suivante. (L'unité est le centimètre.)



a. Écris $5\sqrt{12}-\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.

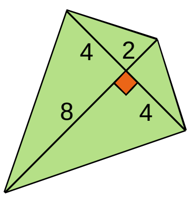
b. Quelle est la nature exacte de ABCD ? Justifie ta réponse.

c. Détermine le périmètre de ABCD sous la forme la plus simple possible.
Tu donneras ensuite l'arrondi au millimètre.

d. Détermine la valeur exacte de l'aire de ABCD.

37 *Cerf-volant*

Les mesures des diagonales de ce cerf-volant sont données en centimètres.
Calcule la valeur exacte de son périmètre puis la valeur arrondie au millimètre.



38 L'unité choisie est le centimètre.
On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{75}$ et pour largeur $\sqrt{48}$.

a. Détermine le périmètre exact de ce rectangle. (Tu donneras la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.)

b. Calcule l'aire exacte du rectangle. (Tu donneras la réponse sous la forme la plus simple possible.)

Équations du type $x^2 = a$

39 *Un peu de vocabulaire*

a. Trouve deux nombres dont le carré est égal à 36.

b. Trouve deux nombres a tels que $a^2 = 0{,}49$.

c. Peux-tu trouver un nombre dont le carré est égal à -100 ? Justifie ta réponse.

40 On considère l'équation $x^2 = 4$.

a. Transforme cette équation de telle sorte que le membre de droite soit égal à 0 puis factorise le membre de gauche.

b. Résous l'équation ainsi obtenue.

c. Quelle(s) est (sont) alors la (les) solution(s) de l'équation $x^2 = 4$?

d. Procède de la même manière pour résoudre l'équation $x^2 = 14$.

41 Trouve la (les) solution(s) des équations suivantes, lorsque celle(s)-ci existe(nt).

a. $x^2 = 9$

b. $x^2 = 5$

c. $x^2 = \dfrac{25}{16}$

d. $x^2 = 0$

e. $x^2 = -16$

f. $4x^2 = 49$

42 Résous les équations suivantes.

a. $x^2 - 5 = 20$

b. $8 + 2x^2 = 40$

c. $7x^2 - 3 = 6x^2 + 27$

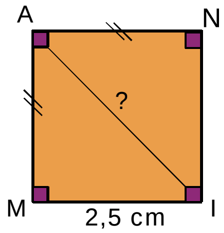
d. $x^2 + 110 = 10$

43 Résous les équations suivantes.

a. $(x + 1)^2 = 9$

b. $x^2 + 1 = 9$

44 *Diagonale d'un carré*



a. Calcule la longueur exacte de la diagonale AI du carré MANI.

b. Si AN $= a$ ($a > 0$), que vaut AI ?

45 Développe et réduis les expressions suivantes.

$A = \sqrt{3}(2 - 5\sqrt{3})$

$B = 5\sqrt{2}(\sqrt{2} - 7\sqrt{18})$

$C = (\sqrt{6} + 2)\sqrt{2}$

$D = 2\sqrt{12}(\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{6})$

46 Effectue les calculs suivants. Écris les résultats sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des entiers relatifs avec c le plus petit possible.

$A = (\sqrt{3} - 2)(5\sqrt{3} + 4)$

$B = (7 - 2\sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{16})$

$C = (5\sqrt{5} - 5)(5 + 3\sqrt{5})$

$D = (4 - 3\sqrt{18})(6 - 4\sqrt{2})$

47 Développe et réduis les expressions suivantes.

$A = (\sqrt{11} + 4)^2$

$B = (2\sqrt{6} - 7)^2$

$C = (4 - 9\sqrt{2})^2$

$D = (\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$

$E = (5\sqrt{12} - 6\sqrt{5})^2$

$F = (\sqrt{13} + 4)(3\sqrt{13} - 4)$

48 Développe et simplifie les expressions suivantes.

$A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$B = (\sqrt{3} + 7)^2 + (\sqrt{3} - 7)^2$

$C = \sqrt{18}\left(\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{18}}{18}\right)$

$D = (6 + 2\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{5})^2$

49 Soient $A = 2 + \sqrt{15}$ et $B = 2 - \sqrt{15}$.

Calcule A^2, B^2 puis $A \times B$.

50 Écris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

$A = \sqrt{80} - \sqrt{20}(2 - \sqrt{15})$

$B = \sqrt{6}(\sqrt{3} + 5) - \sqrt{150}$

$C = \sqrt{7}(-4 - 3\sqrt{63} + 9\sqrt{7})$

$D = \sqrt{98} - (\sqrt{14} + 8)\sqrt{7}$

51 *Un peu d'aire*

Calcule l'aire d'un rectangle ABCD de largeur $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ cm et de longueur $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ cm.

52 *Extrait du Brevet*

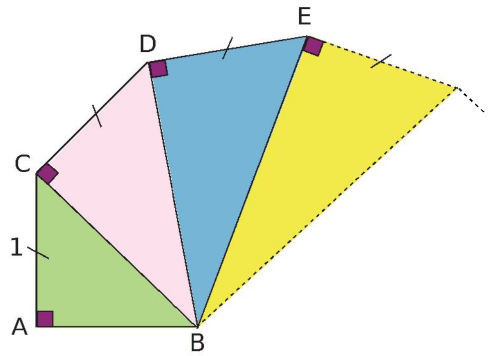
Montrer que E et F sont des nombres entiers.

a. $E = (\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$

b. $F = (2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)$

53 *Spirale de Théodore de Cyrène*

Observe la figure suivante.



a. Sachant que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A, calcule la valeur exacte de BC.

b. En t'aidant de la question **a.** et de la figure ci-dessus, calcule les valeurs exactes de DB et EB.

c. À l'aide des questions précédentes, construis un segment de longueur $\sqrt{7}$.

54 *Calcul littéral*

Soit $A = (2x + 5)^2 - 9x^2$.

a. Développe A.

b. Factorise A.

c. Calcule A pour $x = \sqrt{5}$.

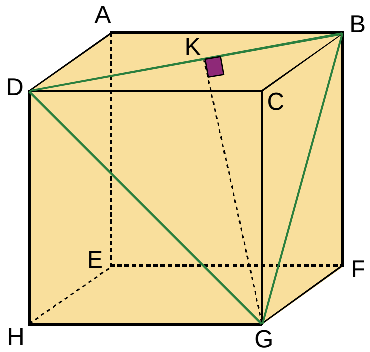
55 *Un peu de physique*

La puissance électrique dissipée dans une résistance est calculée à l'aide de la formule : $P = RI^2$, où P est la puissance en watts (W), R la résistance en ohms (Ω) et I l'intensité en ampères (A).

La puissance dissipée dans un radiateur a une valeur de 3 000 W et lors de son utilisation la mesure de la résistance a donné 18 Ω.

Calcule la valeur arrondie au millième de l'intensité du courant.

56 ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête.



a. Calcule la valeur exacte de GD et écris le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ avec a entier.

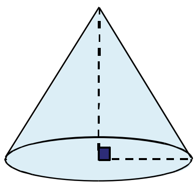
b. Quel est le périmètre du triangle BDG ?
Tu donneras la réponse sous la forme $a\sqrt{2}$.

c. Calcule la valeur exacte de GK.

d. Calcule l'aire du triangle BGD.
Donne la valeur exacte puis une valeur arrondie au centième.

57 *Volume d'un cône*

Calcule la valeur exacte du volume d'un cône de révolution de $2\sqrt{2}$ cm de rayon de base et $\sqrt{8}$ cm de hauteur.



58 *Volume d'une pyramide*

SABC est une pyramide dont la base ABC est un triangle équilatéral de côté $24\sqrt{3}$ cm ; [SO] est la hauteur telle que $SO = 12\sqrt{3}$ cm.

a. Calcule l'aire de la base ABC.

b. Calcule la valeur exacte du volume de la pyramide SABC.

59 *Distance de freinage*

La distance de freinage est la distance nécessaire pour immobiliser un véhicule à l'aide des freins. Elle dépend de la vitesse et de l'état de la route (sèche ou mouillée).

On peut calculer cette distance à l'aide de la formule $d = k \times v^2$ où d est la distance en mètres (m), v la vitesse en km/h et k une constante.

Sur une route sèche, on a $k = 4{,}8 \times 10^{-3}$.

a. Y a-t-il proportionnalité entre la vitesse et la distance de freinage ? Justifie.

b. Calcule la distance de freinage, arrondie à l'unité, d'un véhicule roulant à 90 km/h sur route sèche.

c. Sachant qu'un conducteur a freiné sur 12 m, quelle était sa vitesse ?

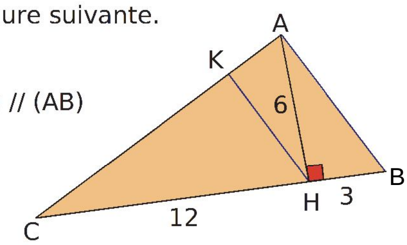
d. Sur une route mouillée, on a $k = 9{,}8 \times 10^{-3}$.
Si le conducteur roule à la même vitesse qu'à la question précédente, quelle sera sa distance de freinage ?

e. Un conducteur ne laisse devant lui qu'une distance de 20 m. À quelle vitesse peut-il rouler sans risquer un accident en cas de freinage brutal sur route sèche ?

f. S'il roule à la même vitesse mais sur route mouillée, quelle distance minimale entre sa voiture et la voiture qui le précède ce conducteur doit-il respecter s'il ne veut pas risquer un accident ?

60 *Avec l'aide de Pythagore*

Observe la figure suivante.



a. Calcule les valeurs exactes de AC et AB.

b. Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.

c. Calcule la valeur exacte de KH.

61 Résous les équations suivantes.

a. $(3x + 9)^2 = 0$

b. $(x + 1)^2 - 16 = 0$

c. $25 - (x + 3)^2 = 0$

d. $(10 - 2x)^2 = 9$

e. $81 = (-5y + 9)^2$

f. $(-5x + 6)^2 = 49$

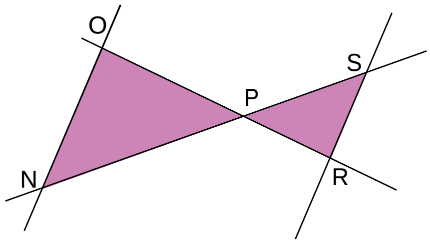
Exercices d'approfondissement

62 *Avec Thalès*

Sur le dessin ci-dessous :
$PN = 3 + \sqrt{3}$; $ON = \sqrt{2}$ et $SR = 3 - \sqrt{3}$.

De plus, les droites (ON) et (SR) sont parallèles.

Calcule PS.
On donnera la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b étant le plus petit possible.



63 *Le bon choix*

Soit $E = (2x - 7)^2 - (5 - x)^2$

a. Développe l'expression E.

b. Factorise E.

c. Choisis la meilleure forme de l'expression E pour calculer sa valeur exacte quand $x = \dfrac{3}{4}$ puis quand $x = \sqrt{3}$.

64 *Nombre entier ?*

Soit $E = \dfrac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{18}} + \dfrac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{18}}$.

Écris le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est une fraction irréductible et b est un nombre entier.

65 *En somme, c'est cela !*

On pose $A = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

a. À l'aide de la calculatrice, vérifie que $181 - 52\sqrt{3} > 0$.

b. Calcule A^2 et B^2 puis $A \times B$.

c. Déduis-en la valeur de $(A + B)^2$ puis la valeur exacte de A + B.

66 *Extrait du Brevet*

Soient $a = \sqrt{5}(1 - \sqrt{2})$ et $b = 5 + \sqrt{2}$.

a. Calculer a^2 et b^2.

b. En déduire les valeurs de $a^2 + b^2$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

67 *Avec un tableur*

L'algorithme de Héron d'Alexandrie est une méthode de calcul pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif N.

a. Recherche qui était Héron d'Alexandrie et à quelle époque il a vécu.

b. Cette méthode est définie par la formule :

$$a' = \frac{\left(a + \dfrac{N}{a}\right)}{2}$$

où a est un nombre choisi au départ et a' remplace a dans l'étape suivante.

On veut programmer avec un tableur la recherche d'une valeur approchée de $\sqrt{10}$ avec cette méthode : ici, N = 10 et a = 1.
On n'utilise que la colonne A.

Dans la cellule A2, tape =(1+10/1)/2 et dans la cellule A3, tape =(A2+10/A2)/2 puis poursuis la programmation comme dans la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	**Racine carrée de 10**		
2	5,50000		
3	3,65909		
4	3,19601		
5	3,16246		
6	3,16228		

Note la valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{10}$.

c. Recommence pour déterminer une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ et $\sqrt{20}$.

68 *Extrait du Brevet*

Soient $a = 2\sqrt{45}$ et $b = \sqrt{80}$.

a. Calculer $a + b$.
On donnera le résultat sous la forme $c\sqrt{d}$ où d est un entier le plus petit possible.

b. Calculer ab.

c. Le nombre a est-il solution de l'équation $x^2 - 2x - 180 = -12\sqrt{5}$? Justifier.

Travailler en groupe

1 Le nombre d'or φ

Chaque groupe présentera au reste de la classe ses recherches sur un des thèmes proposés.

1er Thème : Le rectangle d'or

a. Recherchez ce qu'on appelle un rectangle d'or et écrivez son programme de construction.

b. Construisez un rectangle d'or sur feuille blanche ou à l'aide d'un logiciel de géométrie puis déduisez-en une valeur approchée de φ.

2e Thème : Le pentagone régulier

a. Recherchez le lien unissant le nombre d'or, un pentagone régulier et son pentagramme.

b. Construisez un pentagone régulier et son pentagramme sur feuille blanche ou à l'aide d'un logiciel de géométrie puis déduisez-en une valeur approchée de φ.

3e Thème : Les racines continuées

a. Calculez la valeur exacte et une valeur approchée au dix-millième près de chacun des termes de la suite de nombres suivante.

$A = \sqrt{1+\sqrt{1}}$ $\quad$ $B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

Écrivez D, le terme suivant de cette suite puis calculez sa valeur exacte et une valeur approchée.

b. À l'aide d'un tableur, calculez les six termes suivants de la suite en remarquant que $B = \sqrt{1+A}$ et que $C = \sqrt{1+B}$.

Que remarquez-vous ?

4e Thème : La suite de Fibonacci

a. Recherchez qui était Fibonacci (époque et lieu où il a vécu, ses travaux,...) et la méthode de calculs des termes de sa suite.

b. À l'aide d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite de Fibonacci.

c. Calculez le rapport de deux termes successifs. Que remarquez-vous ?

5e Thème : φ dans l'art et dans la nature

a. Étudiez le rôle du nombre d'or φ à travers l'histoire.

b. Sur Internet, recherchez différents exemples dans la nature où φ est mis en évidence.

c. Sur Internet, recherchez différentes œuvres d'art (peinture, sculpture, architecture) où φ intervient.

2 Le Mistigri des racines carrées

1re Partie : Préparons le jeu !

a. On commence par préparer un jeu de vingt-et-une cartes. Sur chaque carte est écrite une des expressions du tableau suivant.

$3\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{7}\right)^4$	$\sqrt{27}$
$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$	$40\sqrt{7}$
$\sqrt{21}$	$\approx 1{,}414\,2$	Le nombre d'or
$\sqrt{11\,200}$	$\dfrac{1}{\sqrt{8}}$	49
$\sqrt{3}\times\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{18}$
$\dfrac{\sqrt{8}}{8}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{105}}{\sqrt{15}}$
$\sqrt{2}$	40	$\sqrt{1\,600}$

b. Sur une feuille, inscrivez côte à côte les expressions qui sont égales. Une seule des expressions n'est égale à aucune autre : c'est le Mistigri. (La feuille servira de référence en cas de désaccord pendant la partie mais elle devra rester cachée. Les joueurs n'ont pas le droit de l'utiliser.)

2e Partie : Jouons !

c. Un joueur distribue toutes les cartes en commençant par son voisin de gauche.

d. Chaque joueur regarde si, dans son jeu, il possède une paire, c'est-à-dire deux cartes d'expressions égales. Tout au long de la partie, si un joueur a une paire, il l'écarte de son jeu en la posant face visible sur la table. Les autres joueurs vérifient que la paire est correcte.

e. Le donneur prend une carte au hasard dans le jeu du joueur situé à sa gauche. S'il possède une nouvelle paire, il l'écarte de son jeu. Puis, le joueur situé à la droite du donneur prend une carte au hasard dans le jeu du donneur et ainsi de suite.

f. Le gagnant est le joueur qui se débarrasse le premier de toutes ses cartes. Le perdant est celui qui a le Mistigri en main lorsque toutes les paires ont été formées.

Remarque : les joueurs peuvent s'aider d'un brouillon.

3e Partie : Fabriquons un nouveau jeu !

g. Créez un jeu de Mistigri sur le même principe avec d'autres expressions.

h. Jouez avec votre jeu mais cette fois sans utiliser de feuille contenant les « paires ».
À la fin de votre partie, échangez votre jeu avec celui d'un autre groupe puis rejouez.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	Combien vaut la racine carrée de 169 ?	– 13	169^2	13	14
2	Le nombre 11 est égal à...	$\sqrt{11^2}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{121}$	3,31
3	$\sqrt{9}+\sqrt{16}$ est égal à...	$\sqrt{25}$	7	5	12
4	$\sqrt{108}$ est égal à...	$3\sqrt{6}$	$4\sqrt{27}$	$6\sqrt{3}$	10,39
5	$\sqrt{6}\times\sqrt{12}$ est égal à...	$6\sqrt{12}$	$\sqrt{72}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{8}$
6	$\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ est égal à...	$\dfrac{5}{13}$	$\sqrt{\dfrac{5}{13}}$	$\dfrac{\sqrt{25}}{169}$	$\sqrt{\dfrac{25}{169}}$
7	$2X^2-4X+5$ pour $X=\sqrt{3}$ est égal à...	$7\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}+5$	$11-4\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
8	$3\sqrt{5}+\sqrt{20}$ est égal à...	$3\sqrt{25}$	$3\sqrt{100}$	$7\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$
9	$\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}$ est égal à...	$\sqrt{32}$	$\dfrac{5}{3}$	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$
10	$(2+\sqrt{3})^2$ est égal à...	$7+4\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	7	$11+2\sqrt{3}$
11	$(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ est égal à...	$2\sqrt{7}-2\sqrt{5}$	2	– 2	$2+2\sqrt{35}$
12	$X^2=81$ a pour solutions...	9 et 0	8 et – 8	9 et – 9	$\sqrt{9}$ et $-\sqrt{9}$
13	L'équation $X^2+15=11$ a pour solution(s)...	4 et – 4	2 et – 2	aucun nombre	$-\sqrt{11}$ et $\sqrt{11}$

Pour aller plus loin

Racines imbriquées

a. Calcule $\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}$.

b. Complète l'expression précédente avec des radicaux de manière à ce que le résultat du calcul soit égal à 9.

c. Fais de même pour que le résultat soit 12.

Racines cubiques

a. Calcule 4^3.

b. Par définition, la « racine cubique » de 64, notée $\sqrt[3]{64}$, est le nombre qui, élevé à la puissance 3, donne 64.
Quelle est la racine cubique de 64 ?

c. Calcule $(-2)^3$. Déduis-en la racine cubique de – 8.

d. Recopie puis complète les deux phrases suivantes :

« Une racine carrée existe pour des nombres ... . »

« Une racine cubique existe pour des nombres ... . »

e. Recopie et complète les égalités.

$\sqrt[3]{343}=$ .... ; $\sqrt[3]{1\,000}=$ ...... ; $\sqrt[3]{3\,375}=$ ...... ; $\sqrt[3]{-27}=$ ...... ; $\sqrt[3]{-125}=$ ...... et $\sqrt[3]{-216}=$ ....