EXPRESSIONS ALGEBRIQUES, POLYNOMES.

1°) Notions de base en calcul algébrique.

Une expression algébrique est une expression dans laquelle un (ou plusieurs) nombre(s) est remplacé par une (ou plusieurs) lettre(s).

Réduire une expression algébrique, c'est regrouper ensemble tous les termes qui ont les mêmes lettres.

Exemple : $8x^2 - 4xy - 17x^2 + 6y + 3xy = 8x^2 - 17x^2 - 4xy + 3xy + 6y$

$= -9x^2 - xy + 6y$

Dans une expression algébrique :

- Les signes $\times$ entre deux lettres, entre une lettre et un chiffre, entre une lettre et une parenthèse, ou entre un chiffre et une parenthèse, sont sous-entendus
- Si le premier terme est positif, son signe est sous-entendu.
- Si aucun nombre ne précède une lettre, alors il est sous-entendu que c'est 1.

Attention à ne pas confondre : $2x + 3x = 5x$ avec $2x \times 3x = 6x^2$

On peut calculer une valeur d'une expression algébrique : attention aux priorités des calculs !

$E = 3x^2 - 5x + 1$ avec $x = 3$
$E = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 + 1$
$E = 3 \times 9 - 15 + 1$
$E = 27 - 15 + 1$
$E = 12 + 1$
$E = 13$

$F = 3x^2 - 5x + 1$ avec $x = -2$
$F = 3 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 1$
$F = 3 \times 4 + 10 + 1$
$F = 12 + 10 + 1$
$F = 23$

Pour tester une égalité, je calcule séparément le membre de gauche puis le membre de droite, puis je les compare pour voir s'ils sont égaux.

Teste $x^2 + 3 = x + 5$ avec $x = -1$
Membre de gauche :
$x^2 + 3 = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$
Membre de droite :
$x + 5 = (-1) + 5 = 4$
L'égalité est VRAIE pour $x = -1$

Teste $x^2 + 3 = x + 5$ avec $x = 3$
Membre de gauche :
$x^2 + 3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$
Membre de droite :
$x + 5 = 3 + 5 = 8$
L'égalité est FAUSSE pour $x = 3$

2°) Developper et factoriser une forme simple.

Rappel : $ka + kb = k(a + b)$ et $ka - kb = k(a - b)$

forme développée	$\xrightarrow{\text{factorisation}}$	forme factorisée
$ka + kb$		$k(a + b)$
$ka - kb$		$k(a - b)$
somme ou différence	$\xleftarrow[\text{développement}]{}$	produit

Exemples :

Factorise les expressions :

$A = 8x^2 - 12xy$

$B = 3y^2 - 15xy^2$

Développe les expressions :

$C = 2x(3 - 4x)$

$D = xy(3x + 2y)$

3°) Règle de suppression des parenthèses.

On distinguera plusieurs cas, qui dépendent directement de ce qui se trouve juste devant la première parenthèse.

Cas n°1 : si c'est un $+$
Règle de calcul : on retire les parenthèses, rien ne se passe.

Exemples : $3y + (4y^2 - 5) = 3y + 4y^2 - 5$; $8 + (-5x + x^2) = 8 - 5x + x^2$

Cas n°2 : si c'est un $-$
Règle de calcul : on retire les parenthèses, **on oppose TOUS les signes** à l'intérieur des parenthèses.

Exemples : $3y - (4y^2 - 5) = 3y - 4y^2 + 5$; $8 - (-5x + x^2) = 8 + 5x - x^2$

Cas n°3 : si c'est un nombre précédé d'un $+$ ou précédé par rien
Règle de calcul : on développe.

Exemples : $3y(4y^2 - 5) = 12y^3 - 15y$; $8 + 4(-5x + x^2) = 8 - 20x + 4x^2$

Cas n°4 : si c'est un nombre précédé d'un $-$
Règle de calcul : on développe ET on oppose tous les signes.

Exemples :

$-3y(4y^2 - 5) = -12y^3 + 15y$; $8 - 4(-5x + x^2) = 8 + 20x - 4x^2$

4°) Cas particuliers de factorisations.

Comment faire si, une fois la factorisation terminée, on se rend compte que l'on aurait pu factoriser par un nombre plus grand ?

$F = 25x^2 - 75xy$
$F = 5x \cdot 5x - 5x \cdot 15y$
$F = 5x(5x - 15y)$
$F = 5x[5 \cdot x - 5 \cdot 3y]$
$F = 5x[5(x - 3y)]$
$F = 5x \cdot 5 \cdot (x - 3y)$
$\boxed{F = 25x(x - 3y)}$

Comment faire pour factoriser par -1, ou par un nombre négatif ?

$E = -3x^2 + 4$
$E = -(3x^2 - 4)$ je mets – devant la parenthèse, et j'oppose les signes dans les parenthèses.

$D = -3xy + 12a$
$D = -3 \cdot xy - 3 \cdot (-4a)$ ou $D = -3 \cdot xy + (-3) \cdot (-4a)$
$D = -3(xy - 4a)$ ou $D = -3\big(xy + (-4a)\big)$
$D = -3(xy - 4a)$

Un exemple pour s'amuser : factorise
$C = -3(2x - 1) + 5(2x - 1) - 2x + 1$
Je remarque que $2x - 1$ est presque un facteur commun qui apparait trois fois.
Je dois factoriser le troisième terme par -1 pour faire apparaitre $2x - 1$
$-2x + 1 = -(2x - 1)$
$C = -3(2x - 1) + 5(2x - 1) - (2x - 1)$
$C = (2x - 1)(-3 + 5 - 1)$
$C = (2x - 1)(1)$
$C = 2x - 1$

5°) Double distributivité.

Règle générale :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

$A = (3x + 2)(10 + 8x)$

$A = 3x \cdot 10 + 3x \cdot 8x + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8x$

$A = 30x + 24x^2 + 20 + 16x$

$A = 24x^2 + 46x + 20$

$B = \left(\frac{2}{5}x + 3\right)(2x + 5)$

$B = \frac{2}{5}x \cdot 2x + \frac{2}{5}x \cdot 5 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5$

$B = \frac{4}{5}x^2 + \frac{10}{5}x + 6x + 15$

$B = \frac{4}{5}x^2 + 2x + 6x + 15$

$B = \frac{4}{5}x^2 + 8x + 15$

Pour t'entrainer :

$$A = (3 + 2x)(5x + 1)\ ;\ B = (3 + 5y)(2 + 5y)\ ;\ C = (4a + 10)(3 + a)\ ;\ D = \left(\frac{x}{2} + 2\right)\left(3 + \frac{2x}{3}\right)$$

Cas où on a des nombres négatifs :

$C = (2x - 3)(-5 - x)$
$C = 2x \cdot (-5) + 2x \cdot (-x) + (-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-x)$
$C = -10x - 2x^2 + 15 + 3x$
$C = -2x^2 - 7x + 15$

$D = (-5x + 2)(x - 9)$
$D = (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot (-9) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-9)$
$D = -5x^2 + 45x + 2x - 18$
$D = -5x^2 + 47x - 18$

Cas où on a un signe – devant le double produit :

$E = 2x^2 + 4x - 1 - [(3x - 5)(2 - 7x)]$ ⚠ ATTENTION : ajouter des crochets.
$E = 2x^2 + 4x - 1 - [3x \cdot 2 + 3x \cdot (-7x) + (-5) \cdot 2 + (-5) \cdot (-7x)]$
$E = 2x^2 + 4x - 1 - [6x - 21x^2 - 10 + 35x]$
$E = 2x^2 + 4x - 1 - (-21x^2 + 41x - 10)$
$E = 2x^2 + 4x - 1 + 21x^2 - 41x + 10$
$E = 2x^2 + 21x^2 + 4x - 41x - 1 + 10$
$E = 23x^2 - 37x + 9$

Deuxième méthode pour le signe – devant le double produit :
on développe le signe – uniquement dans la première parenthèse, puis on applique les règles habituelles.

$F = -(2x - 8)(4 - 5x)$
$F = (-2x + 8)(4 - 5x)$
$F = (-2x) \cdot 4 + (-2x) \cdot (-5x) + 8 \cdot 4 + 8 \cdot (-5x)$
$F = -8x + 10x^2 + 32 - 40x$
$F = 10x^2 - 48x + 32$

Cas où on a un nombre devant le double produit :

Méthode 1 : on met des crochets, on calcule le double produit, puis on développe le nombre.

Méthode 2 : on développe le nombre uniquement dans la première parenthèse, puis on applique les règles de calcul habituelles.

Méthode 1 :

$G = 3(x - 5)(2x - 7)$
$G = 3(2x \cdot x + x \cdot (-7) + (-5) \cdot 2x + (-5) \cdot (-7))$
$G = 3(2x^2 - 7x - 10x + 35)$
$G = 3(2x^2 - 17x + 35)$
$G = 6x^2 - 51x + 105$

Méthode 2

$G = 3(x - 5)(2x - 7)$

$G = (3x - 15)(2x - 7)$
…
$G = 6x^2 - 51x + 105$

6°) Identités remarquables.

- Carré d'une somme.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ première identité remarquable

Les identités remarquables permettent de développer plus rapidement, et de factoriser une expression.

Développer avec la première identité :

$$(x+8)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 = x^2 + 16x + 64$$

$$(5+y)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot y + y^2 = 25 + 10y + y^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(6+x^3)^2 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x^3 + (x^3)^2 = 36 + 12x^3 + x^6 = x^6 + 12x^3 + 36$$

$$\left(\frac{2}{3} + 2x\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2x + (2x)^2 = \frac{4}{9} + \frac{8x}{3} + 4x^2$$

Factoriser avec la première identité :

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$

$y^2 + 10y + 25 =$
$4m^2 + 4m + 1 =$
$9 + 12f + 4f^2 =$
$1 + 10z + 25z^2 =$

$0{,}04 + 0{,}4x + x^2 =$
$x^6 + 2x^3 + 1 =$
$\frac{9}{4}x + 3x + 1 =$

- Carré d'une différence.

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$
$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ deuxième identité remarquable

Développer avec la deuxième identité :

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\left(\frac{3}{2} - 0{,}1x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0{,}1x + (0{,}1x)^2 = \frac{9}{4} - 0{,}3x + 0{,}01x^2$$

Factoriser avec la deuxième identité :

$$144y^2 - 48y + 4 = (12y)^2 - 2 \cdot 12y \cdot 2 + 2^2 = (12y-2)^2$$

- Différence entre deux carrés.

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ troisième identité remarquable

Développer avec la troisième identité :

$$(x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$$

$$(2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$

$$\left(\frac{2}{3} - 5x\right)\left(\frac{2}{3} + 5x\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (5x)^2 = \frac{4}{9} - 25x^2$$

Cas particuliers : factorise A et B, développe et réduis C, explique pourquoi D et E ne sont pas factorisables.

$$A = -16 + 49x^2\,; B = 4 + 6x + 9x^2\,; C = (2x-3)^2 - 2(2x-3)(x+4) + (x+4)^2$$

$$D = 49 + 100x^2\,; E = 4 + 4x - x^2\,; F = y^2 + y + 1$$

7°) Polynômes.

Un polynôme est une expression de la forme suivante :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots\ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où tous les a_i sont des nombres réels connus et où x est l'inconnue.

Exemples :

$$p(x) = -5x^9 + 4x^7 - 6x^6 - 0{,}15x^5 + 4x - 3$$

Le polynôme est une succession d'additions et de soustractions dans lequel chacun des termes est constitué par : un coefficient (le nombre) et x élevé à une puissance. Dans l'expression polynomiale, x est appelé inconnue, ou variable du polynôme, et ne peut prendre qu'une seule valeur à la fois.

$p(x)$ se lit : « p de x ».

On dit que la plus grande puissance de la variable s'appelle le degré du polynôme. Ici, le degré de $p(x)$ est 9.

Un polynôme doit toujours être ordonné par ordre décroissant des puissances de la variable x.

Le terme qui n'a pas de x (ou : qui multiplie x^0) s'appelle le terme constant, ici, c'est -3.

8°) Fractions algébriques.

On appelle fraction algébrique une fraction qui contient une expression littérale à son dénominateur.

Exemple : $\frac{7}{x-3}$; $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$ sont des fractions algébriques.

Important : **on ne peut pas diviser par zéro**… donc les fractions algébriques ont une valeur interdite.

La valeur interdite de $\frac{7}{x-3}$ est 3. On apprendra à calculer les valeurs interdites de $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$ plus tard (il y en a deux : $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$).

Pour chercher la valeur interdite il faut résoudre : $dénominateur \neq 0$ (on résout comme une équation)

Exemples : cherche la valeur interdite des fractions algébriques :

$$A = \frac{3x-9}{2x+8}$$

$$B = \frac{-2x+7}{3x-5}$$

Avec les fractions algébriques, on peut simplifier en factorisant le numérateur et le dénominateur. Ce n'est pas toujours simplifiable.

Exemple : $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9} = \frac{(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2}{(2x)^2-3^2} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{(2x-3)(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$

Factorise et simplifie :

$$C = \frac{10x-15}{2x-3}$$

$$D = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$$