NOMBRES RATIONNELS

1°) Définitions

On appelle fraction le quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers ($b \neq 0$). L'ensemble de nombres qui contient les fractions s'appelle l'ensemble des nombres rationnels.

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a. (exemple : $3 \times \frac{7}{3} = 7$)

$\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$. (exemple : $5x = 8$ a pour solution $x = \frac{8}{5}$)

$\frac{a}{b}$ est la proportion de a parmi b. (exemple : $\frac{2}{5}$ des élèves sont des garçons)

2°) Egalités de quotients

Un même nombre peut s'exprimer par plusieurs écritures fractionnaires différentes :

$$0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} = \frac{20}{80} = \frac{50}{200} = \frac{4}{16} = \frac{13}{52}$$

Par convention, on cherchera toujours à donner l'écriture d'une fraction sous sa forme irréductible. Pour cela nous avons trois méthodes :

- On applique $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$ donc on divise, pas par pas, le numérateur et le dénominateur par un même nombre jusqu'à épuisement des diviseurs communs.
  Exemple : $\frac{288 \div 2}{240 \div 2} = \frac{144 \div 2}{120 \div 2} = \frac{72 \div 4}{60 \div 4} = \frac{18 \div 3}{15 \div 3} = \frac{6}{5}$

- On calcule le PGCD entre le numérateur et le dénominateur, puis on simplifie par le PGCD.
  Exemple : $\frac{288}{240}$; on a : $288 = 2^5 \times 3^2$ et $240 = 2^4 \times 3 \times 5$ donc PGCD(288 ;240)=48.
  J'ai donc $\frac{288}{240} = \frac{288 \div 48}{240 \div 48} = \frac{6}{5}$

- On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers, et on simplifie le plus possible.
  Exemple : $\frac{288}{240} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$

3°) Comparaison de fractions.

En général, on sait que l'on a une fraction plus grande que 1 lorsque le numérateur est plus grand que le dénominateur (exemples : $\frac{25}{8}$; $\frac{56}{10}$ etc.) ; et une fraction plus petite que 1 lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur (exemples : $\frac{8}{26}$; $\frac{1}{2}$; etc.).

Si deux fractions ont le même numérateur, alors la fraction la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur (exemple : $\frac{3}{7} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$).

Si deux fractions ont le même dénominateur, alors la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur (exemple : $\frac{3}{8} < \frac{7}{8} < \frac{13}{8} < \frac{51}{8}$).

Pour comparer deux fractions, il est parfois plus facile de les mettre au même dénominateur (exemple : $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ car $\frac{3}{4} = \frac{3\times5}{4\times5} = \frac{15}{20}$ et $\frac{4}{5} = \frac{4\times4}{5\times4} = \frac{16}{20}$ et on a bien $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$).

Enfin, n'oublions pas que les fractions peuvent être négatives…

Remarque : ne pas confondre inverse et opposé

Exemples :

Nombre	Son inverse	Son opposé	Son inverse et opposé
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
5	$\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{9}$	9	$-\frac{1}{9}$	-9
$0{,}5$	2	$-0{,}5$	-2

4°) Additions et soustractions de fractions.

Règle de calcul : pour pouvoir additionner ou soustraire deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur.

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}}$$

Exemples :

$A=3+\frac{5}{7}$

$A=\frac{3}{1}+\frac{5}{7}$

$A=\frac{3\times 7}{1\times 7}+\frac{5}{7}$

$A=\frac{21}{7}+\frac{5}{7}$

$\boxed{A=\frac{26}{7}}$

$B=\frac{3}{5}-\frac{7}{45}$

$B=\frac{3\times 9}{5\times 9}-\frac{7}{45}$

$B=\frac{27}{45}-\frac{7}{45}$

$B=\frac{27-7}{45}$

$B=\frac{20\div 5}{45\div 5}$

$\boxed{B=\frac{4}{9}}$

$C=\frac{2}{5}-\frac{7}{4}$

$C=\frac{2\times 4}{5\times 4}-\frac{7\times 5}{4\times 5}$

$C=\frac{8}{20}-\frac{35}{20}$

$C=\frac{8-35}{20}$

$\boxed{C=-\frac{27}{20}}$

$D=\frac{-7}{15}-\frac{5}{12}$

$D=\frac{-7\times 4}{15\times 4}-\frac{5\times 5}{12\times 5}$

$D=-\frac{28}{60}-\frac{25}{60}$

$D=\frac{-28-25}{60}$

$\boxed{D=-\frac{53}{60}}$

5°) Multiplications entre les fractions.

Règle de calcul : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Attention à toujours penser à simplifier avant de calculer !

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}} \qquad \boxed{a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}}$$

Exemples :

$A=2\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{3}$

$A=\frac{2\times 3\times 7}{5\times 3}$

$\boxed{A=\frac{14}{5}}$

$B=21\times\frac{25}{35}$

$B=\frac{3\times 7\times 5\times 5}{7\times 5}$

$\boxed{B=15}$

$C=\frac{144}{125}\times\frac{75}{48}\times\frac{5}{9}$

$C=\frac{144\times 75\times 5}{125\times 48\times 9}$

$C=\frac{12\times 4\times 3\times 25\times 3\times 5}{25\times 5\times 12\times 4\times 3\times 3}$

$C=\frac{12\times 4\times 3\times 25\times 3\times 5}{25\times 5\times 12\times 4\times 3\times 3}$

$\boxed{C=1}$

6°) Divisions entre les fractions.

Règle de calcul : diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

Méthode : on transforme la division en multiplication, et on transforme le diviseur par son inverse.

Exemples :

$$A = \frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$$
$$A = \frac{3}{2} \times \frac{7}{5}$$
$$\boxed{A = \frac{21}{10}}$$

$$B = \frac{12}{25} \div \frac{18}{50}$$
$$B = \frac{12}{25} \times \frac{50}{18}$$
$$B = \frac{6 \times 2 \times 25 \times 2}{25 \times 6 \times 3}$$
$$\boxed{B = \frac{4}{3}}$$

$$C = 5 \div \frac{17}{3}$$
$$C = 5 \times \frac{3}{17}$$
$$\boxed{C = \frac{15}{17}}$$

$$D = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$$
$$D = \frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$$
$$D = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$$
$$\boxed{D = \frac{14}{15}}$$

$$E = \frac{2}{\frac{5}{7}}$$
$$E = 2 \div \frac{5}{7}$$
$$E = 2 \times \frac{7}{5}$$
$$\boxed{E = \frac{14}{5}}$$

$$F = \frac{\frac{2}{5}}{7}$$
$$F = \frac{2}{5} \div 7$$
$$F = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7}$$
$$\boxed{F = \frac{2}{35}}$$