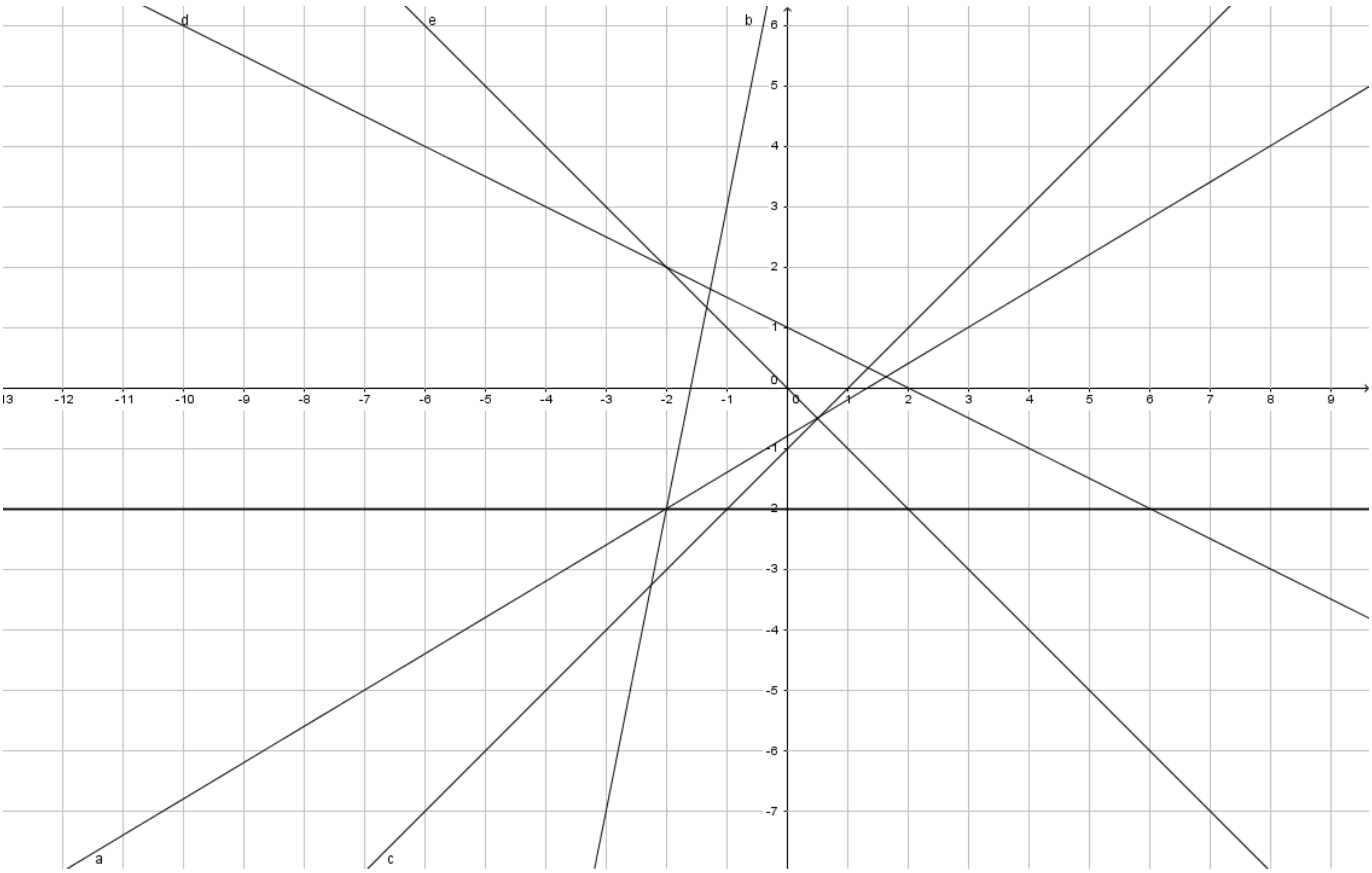
Exercice 1 :

Pour chacune des droites représentées, donne le coefficient directeur.



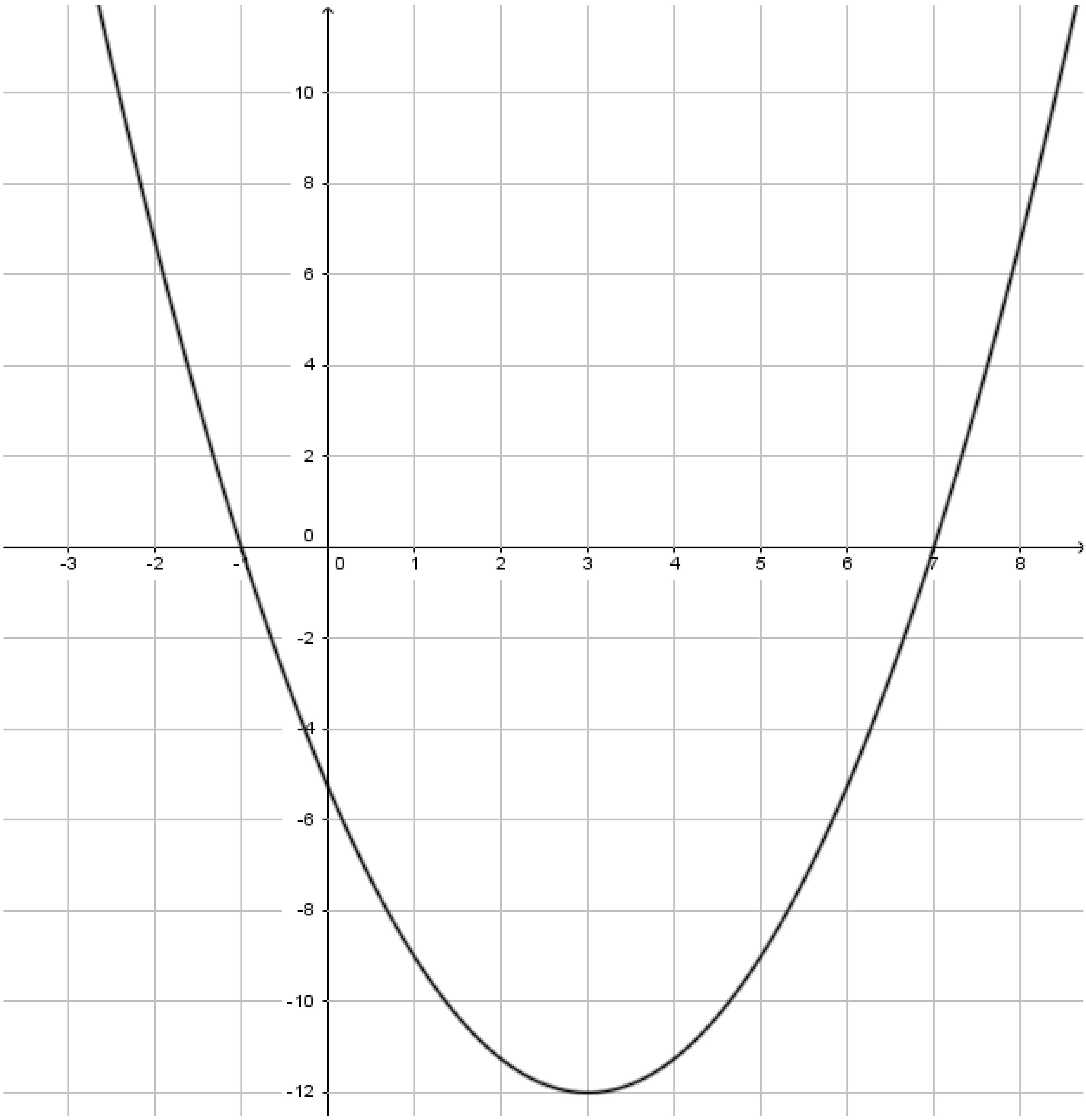
Exercice 2 :

Les questions de cet exercice se basent sur la représentation graphique de l'exercice 1.

a. Calcule l'équation de la droite parallèle à a et passant par $(0;-4)$
b. Calcule l'équation de la droite perpendiculaire à b et passant par $(-4;0)$
c. Calcule l'équation de la droite parallèle à d et passant par $(3;-5)$
d. Calcule l'équation de la droite perpendiculaire à e et passant par $(-6;-4)$
e. Calcule l'équation de la droite parallèle à f et passant par $(-7;-5)$
f. Calcule l'équation de la droite perpendiculaire à f et passant par $(-9;-7)$

Exercice 3 :

On donne la représentation graphique d'une fonction f :

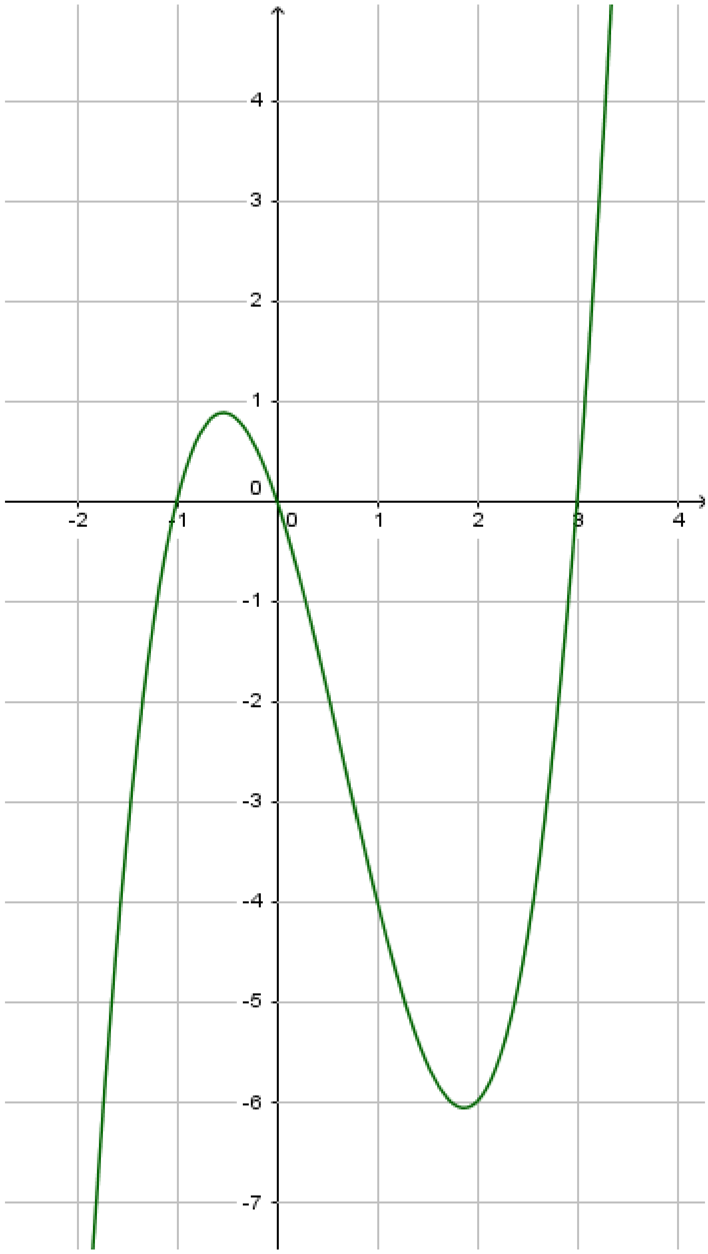


Trace, en -1, une tangente à la courbe et donne le coefficient directeur. Déduis-en $f'(-1)$.

Fais de même pour trouver $f'(1)$; $f'(3)$; $f'(7)$.

Exercice 4 :

Dis sur quel intervalle le nombre dérivé est positif, et sur quel intervalle le nombre dérivé est négatif. (tu donneras des valeurs approchées)



Exercice 5 :

Sur la représentation graphique de l'exercice 4, existe-t-il des endroits où les nombres dérivés sont égaux ? Si oui, donne un exemple.

Exercice 6 :

Sur la représentation graphique de l'exercice 4, existe-t-il des endroits où les tangentes sont parallèles ? Si oui, donne un exemple.

Exercice 7 :

La fonction $f'(x) = -2(x-2)^2 + 4$ est la fonction dérivée d'une fonction f.

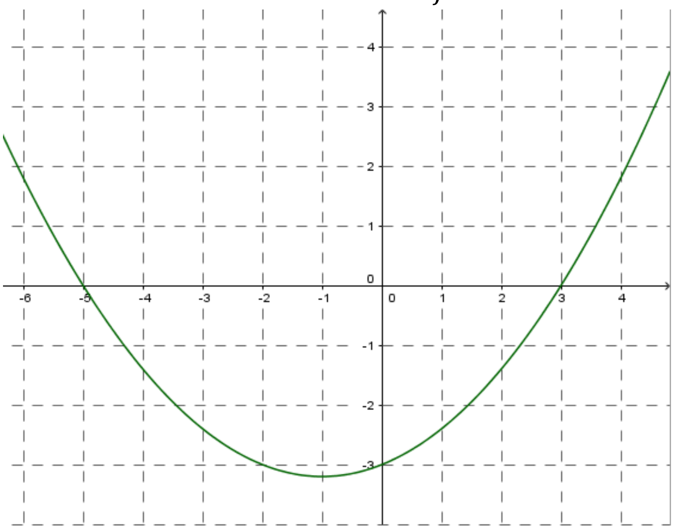
a. Trouve les zéros de f'
b. Construis le tableau de signes de f'
c. Déduis-en le tableau des variations de f, précise en quel point f admet un extremum, précise dans chaque cas la nature de l'extremum.

Exercice 8 :

Même question avec $f'(x) = -2x + 10$.

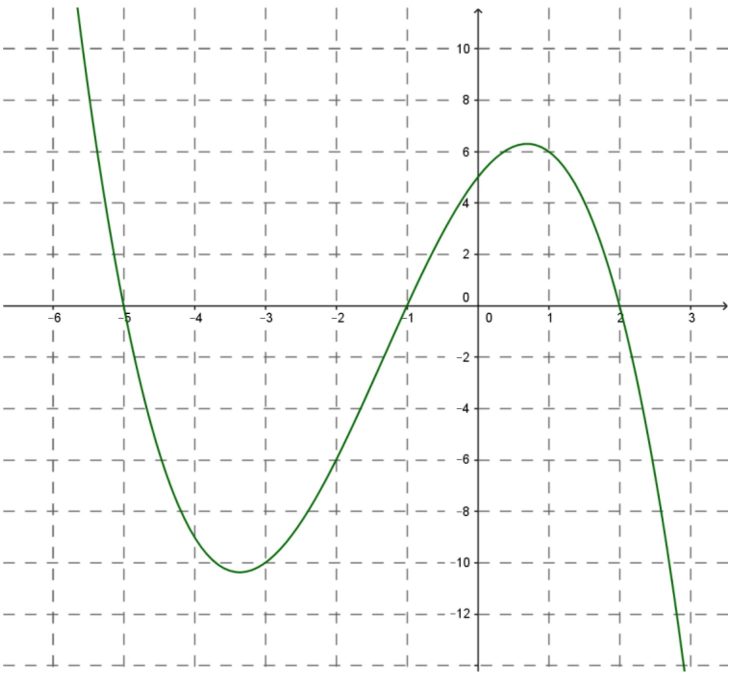
Exercice 9 :

Voici la représentation graphique d'une fonction f'. Détermine en quel(s) point(s) f admet un extremum et précise sa nature. Construis ensuite le tableau de variations de la fonction f.



Exercice 10 :

Même exercice avec la représentation graphique suivante :



Exercice 11 :

Calcule les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 8x - 4$ b. $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ c. $f(x) = -x$ d. $f(x) = x + 1$

e. $f(x) = x^2$ f. $f(x) = x^3$ g. $f(x) = x^4$ h. $f(x) = x^5$

i. $f(x) = 5x^2 + 2$ j. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ k. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ l. $f(x) = -2x(x + 3)$

Exercice 12:

Calcule les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ b. $f(x) = \frac{2}{x}$ c. $f(x) = \frac{3}{x}$ d. $f(x) = \frac{4}{x}$

e. $f(x) = -\frac{5}{x^2}$ f. $f(x) = -\frac{4}{x^3}$ g. $f(x) = -\frac{3}{x^4}$ h. $f(x) = -\frac{2}{x^5}$

i. $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ j. $f(x) = 5 - \frac{3}{x}$ k. $f(x) = 2 - \frac{5}{x}$ l. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

Exercice 13 :

Calcule les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{x+3}{x+5}$ b. $f(x) = \frac{x-4}{x+8}$ c. $f(x) = \frac{2x+7}{4x-5}$ d. $f(x) = \frac{2x+3}{5x-3}$

e. $f(x) = \frac{2x+3}{5x-2}$ f. $f(x) = \frac{3x+2}{x-5}$ g. $f(x) = \frac{5-2x}{x+3}$ h. $f(x) = \frac{-x-2}{2x+2}$

i. $f(x) = \frac{-2x+2}{x-2}$ j. $f(x) = \frac{x+3}{2x-4}$ k. $f(x) = \frac{-x+4}{-2x+3}$ l. $f(x) = \frac{x}{x+3}$

Exercice 14 :

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, calcule l'équation de la tangente à la représentation graphique C aux points d'abscisse a, puis vérifie la cohérence de ton résultat en représentant graphiquement sur la calculatrice :

1. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad a = -1, \quad a = 0, \quad a = 2$
2. $f(x) = \frac{4x^2+5x+1}{x}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad a = 1$

Exercice 15 :

On donne la fonction suivante :

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

On appelle C sa représentation graphique.

1. Donne le domaine de définition de f.
2. Calcule la fonction dérivée f'.
3. Etudie le signe de la dérivée f'.
4. Donne le tableau des variations de la fonction f.
5. Calcule une équation de T la tangente à C au point d'abscisse 2.
6. Trace T et C dans un même repère.

Exercice 16 :

Remi travaille dans une entreprise qui fabrique des jouets. La fonction qui donne le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, en fonction du millier d'objets fabriqués est la suivante : $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 3x^2 + 27x - 100$. Le but de cet exercice est de calculer quelle doit être la quantité d'objets fabriqués pour que le bénéfice réalisé soit le plus haut possible.

On travaille sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on règlera la calculatrice graphique avec $0 \leq x \leq 15$ et $0 \leq y \leq 160$.

1. Quel sera le cout de fabrication pour 5000 objets ?
2. Quel sera le cout de fabrication pour 13000 objets ?
3. D'après la représentation graphique, précise l'intervalle sur lequel f est positive, et précise à quelle production cela correspond.
4. Calcule la fonction dérivée f'
5. Construis le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f sur $[0; 15]$.
6. En quel point f admet-elle un maximum ? Quel est alors le maximum atteint ?
7. Déduis-en quelle est la production d'objets que l'entreprise doit prévoir, et quels sera le bénéfice réalisé.

Exercice 17 :

On dérive les fonctions homographiques (de type $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ à l'aide de la formule suivante :

$$f'(x)=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

Dans cet exercice, on demande : pour chaque fonction, donne l'ensemble de définition, calcule la fonction dérivée, puis étudie le signe de la dérivée pour enfin donner le tableau des variations de la fonction, en précisant où la fonction admet un maximum ou un minimum.

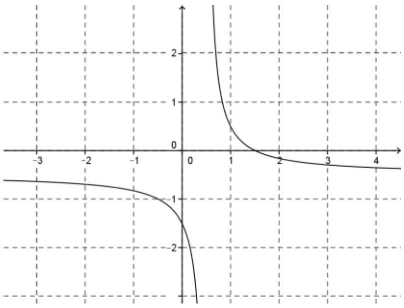
Un exemple : $f(x)=\frac{-2x+3}{4x-2}$; la fonction est définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

La fonction dérivée est $f'(x)=\frac{-2(4x-2)-4(-2x+3)}{(4x-2)^2}=\frac{-8x+4+8x-9}{(4x-2)^2}=\frac{-5}{(4x-2)^2}$

Pour construire le tableau des variations, j'ai besoin de la valeur interdite ($\frac{1}{2}$) ; j'observe que, le dénominateur étant un carré parfait, il est toujours positif. En revanche le numérateur (ici, -5) est toujours négatif.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-5		$-$	$\|$	$-$	
$(4x-2)^2$		$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Ci-contre, ce que tu peux observer sur ta calculatrice.



Explications pour construire le tableau :

- Dans la première ligne, j'indique le x et les valeurs importantes sur l'axe des abscisses (zéros et valeurs interdites).
- Dans la deuxième ligne, j'ai le numérateur de ma fonction homographique.
- Dans la troisième ligne, j'ai le dénominateur de ma fonction homographique.
- Dans la quatrième ligne, je calcule le signe de la fonction dérivée en appliquant la règle des signes
- Dans la dernière ligne, je déduis les variations de ma fonction en utilisant le signe de la fonction dérivée.

La fonction f n'admet pas de maximum ni de minimum (c'est une hyperbole).

Fais de même avec la deuxième ligne des fonctions de l'exercice 13, et vérifie régulièrement la cohérence de tes résultats avec la calculatrice.

Rappel : tu peux calculer une fonction dérivée sur ta calculatrice, en écrivant par exemple $\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x+3}{4x-2}\right)$.

Correction de l'exercice 16 :

Indication : vous pouvez définir une fonction f dans un nouveau classeur afin de pouvoir simplifier tous vos calculs.

1. $f(5) \approx 68{,}333$ donc le bénéfice réalisé pour 5 000 objets est de 68 333 €.
2. $f(13) \approx 25{,}667$ donc le bénéfice réalisé pour 13 000 objets est de 25 667 €.
3. D'après la représentation graphique, $f(x)$ est positive sur environ $[3; 13{,}4]$ donc le bénéfice est positif entre 3000 et environ 13 400 objets fabriqués.
4. $f'(x) = -x^2 + 6x + 27$
5. Pour construire le tableau de signes de la dérivée, qui est une fonction quadratique, je dois calculer les racines. Ici je trouve $x_1 = -3$ et $x_2 = -3$. Comme $a = -1 < 0$, la dérivée est représentée par une parabole concave, donc elle sera positive entre ses racines et négative à l'extérieur. Je peux maintenant construire le tableau demandé. Pour mieux vous expliquer, je commence par construire un tableau qui n'est pas demandé : le tableau des variations complet de la fonction :

x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$f(-3)$	↗	$f(9)$	↘	

Le tableau demandé est une réduction de ce tableau, je ne vais donc indiquer que la partie nécessaire, donc entre 0 et 15 :

x	0		9		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$f(0)$	↗	$f(9)$	↘	$f(15)$

6. Le maximum est atteint pour $x = 9$ et il est égal à $f(9) = 143$.
7. Ainsi on a un bénéfice maximal lorsque l'entreprise fabrique 9 000 objets. Ce bénéfice est alors de 143 000 euros.