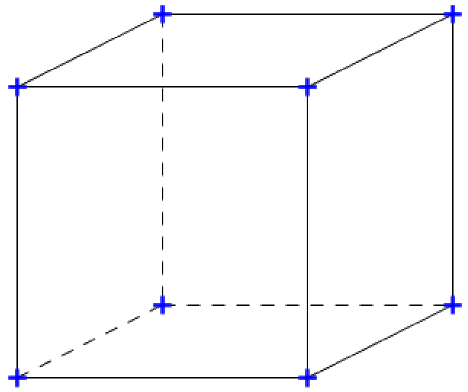
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

1°) Solides usuels de l'espace

le cube

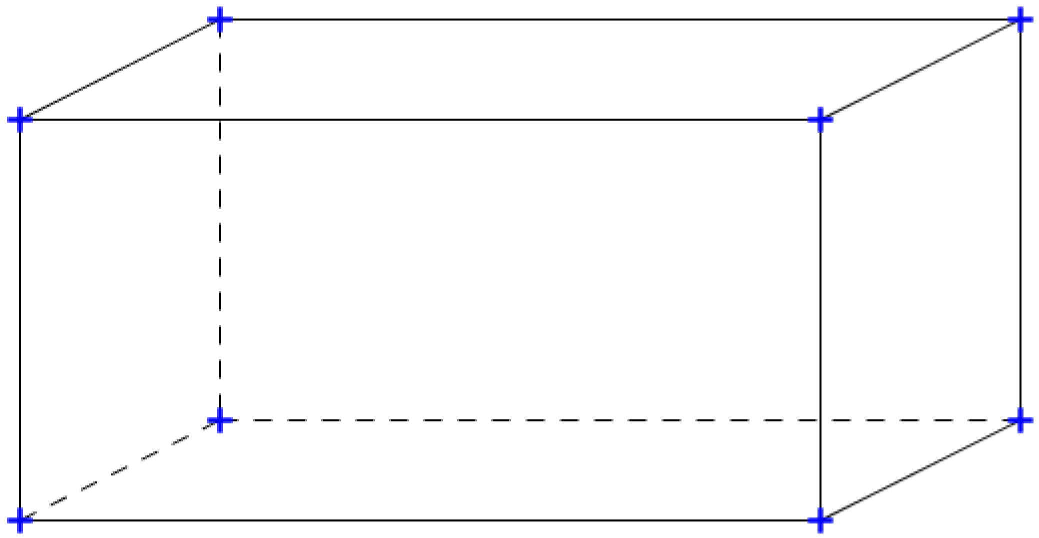


La face avant et la face arrière sont représentées par des carrés.

Les faces latérales sont représentées par des parallélogrammes, mais dans la réalité, ce sont des carrés.
Parfois sur certains dessins, certaines faces latérales peuvent être représentées par des losanges.
Sur le dessin, les faces opposées sont toujours superposables.

On voit bien les huit sommets, les douze arêtes, et les six faces.

le parallélépipède rectangle (ou pavé droit)



La face avant et la face arrière sont représentées par des rectangles.

Les faces latérales sont représentées par des parallélogrammes, mais dans la réalité, ce sont des rectangles.

On voit bien que les faces opposées sont superposables.

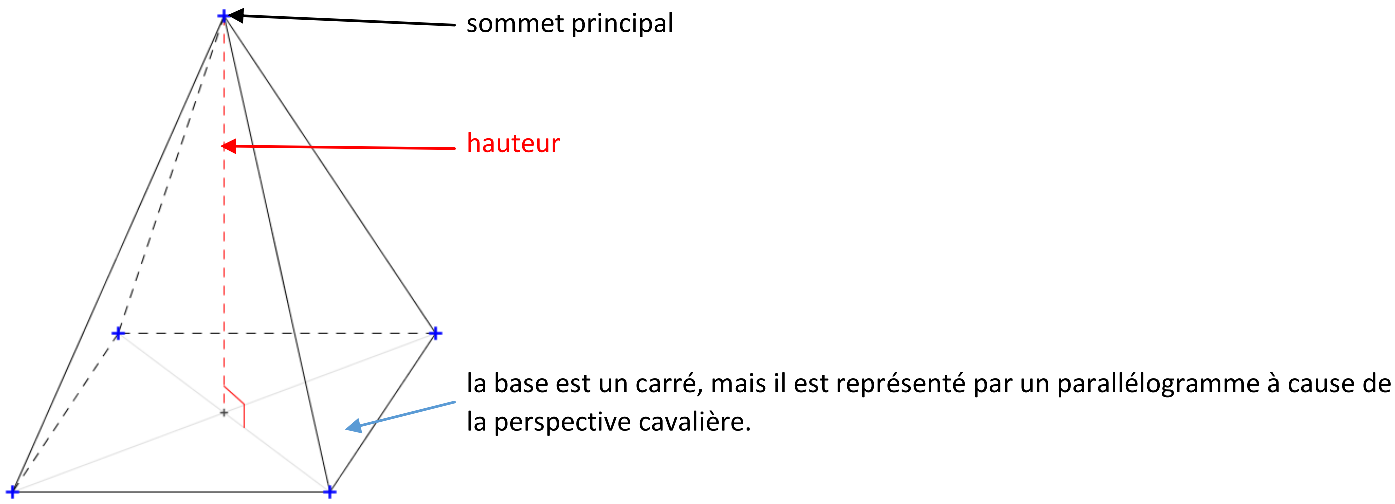
On voit bien les huit sommets, les douze arêtes, et les six faces.

Pyramide régulière à base carrée :

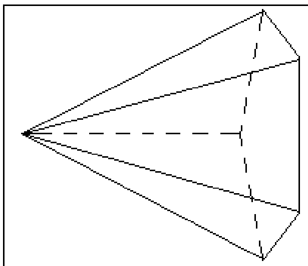
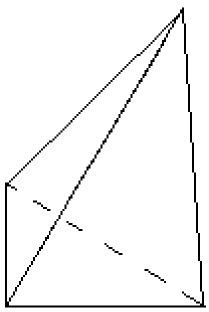
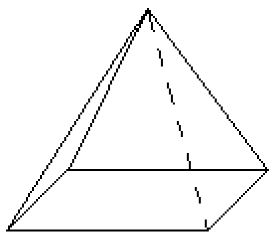
La pyramide à base carrée est un solide de l'espace qui a :

- Une base qui est un carré
- Quatre triangles isocèles superposables qui sont les faces latérales

La distance entre le centre du carré et le sommet principal s'appelle la hauteur de la pyramide.



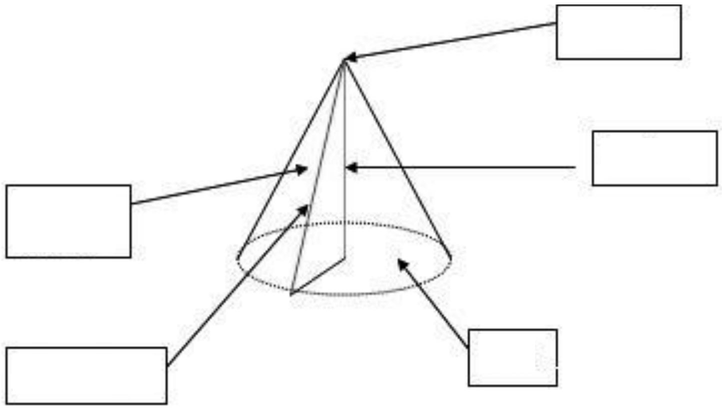
Il existe d'autres formes de pyramides, pas forcément pyramides régulières, pas forcément à base carrée :

	Nombre de faces	Nombre de sommets	Nombre d'âretes
			
			
			

Le cône de révolution:

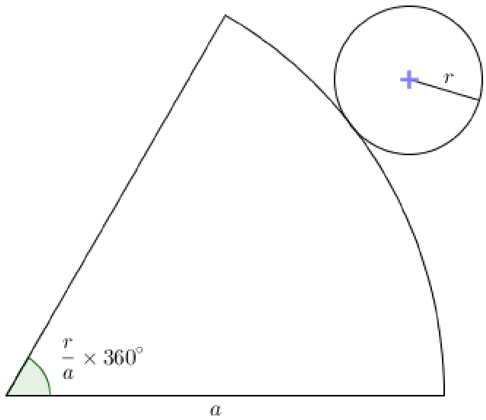
Dans les espaces prévus, place les mots suivants au bon endroit :

Sommet – Hauteur – Génératrice – surface latérale – Base



Le cône de révolution s'obtient par rotation d'un triangle rectangle le long de l'un des cotés de son angle droit.

Voici à quoi ressemble un patron de cône de révolution :

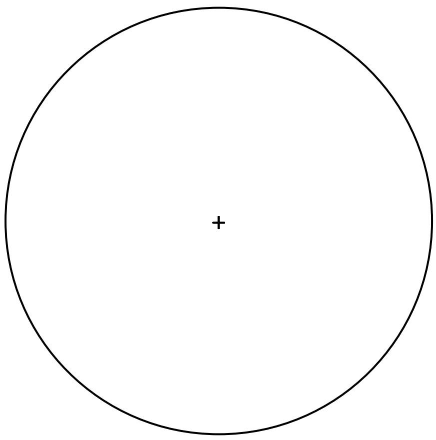


Que représentent les nombres a et r sur ce patron ?

Si on te dit $a = 6$ et $r = 1$,
sais-tu calculer quelle sera la hauteur du cône à partir de ce patron ?

Sphère et boule :

La sphère et la boule ont la même représentation graphique (à compléter)



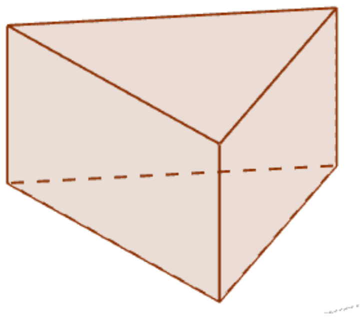
La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble de tous les points de l'espace à une distance r de O. La sphère est vide, comme une bulle de savon.

La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble de tous les points de l'espace à une distance inférieure ou égale à r de O. La boule est remplie, comme une boule de glace.

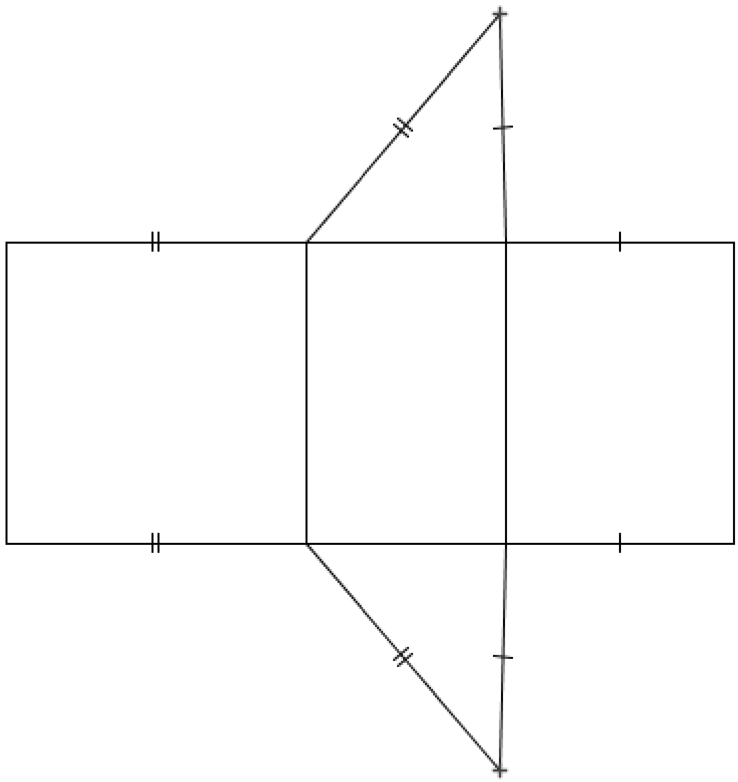
Prismes droits :

Un prisme droit est un solide composé de :

- deux bases, qui sont deux polygones superposables,
- et de faces latérales, qui sont des rectangles.



Voici le patron d'un prisme droit à base triangulaire.



Maintenant, à toi : construis le patron d'un prisme droit à base triangulaire tel que le triangle soit un triangle rectangle de mesures 3cm, 4cm et 5cm, et que la hauteur du prisme soit 1cm.

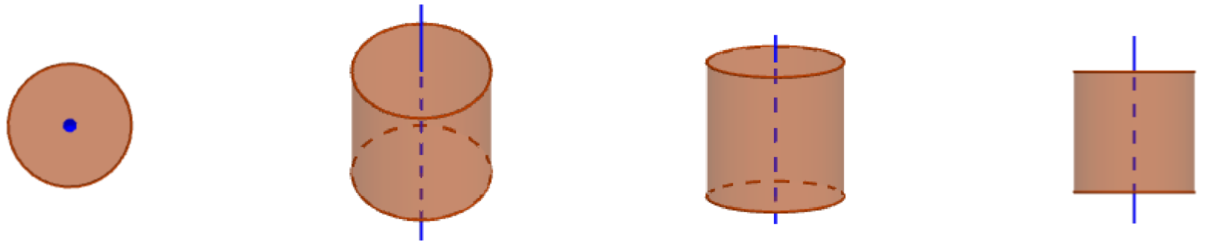
Cylindre de révolution :

Le cylindre de révolution s’obtient en faisant tourner un rectangle le long de l’un de ses cotés.

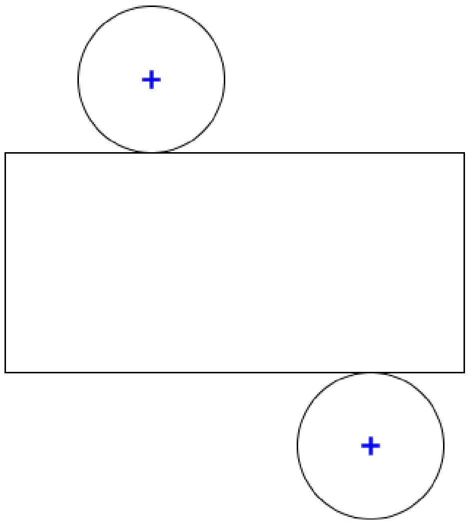
Il se compose de :

- deux bases, qui sont des cercles superposables,
- une face latérale courbée qui, si on la déplie, est un rectangle.

Vue de dessus → → Vue de face



Voici un patron de cylindre de révolution :



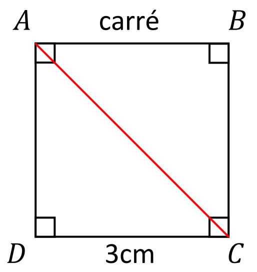
La hauteur du rectangle qui fait la face latérale est de 3cm. Le rayon de chaque base est 1cm.

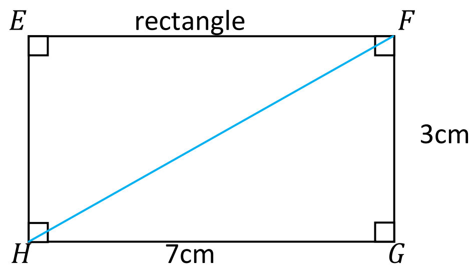
Quelle est, selon toi, la mesure de la longueur du rectangle qui fait la face latérale ?

2°) Calcul de la longueur de la diagonale d’un cube ou d’un parallélépipède

Rappel : pour calculer la longueur de la diagonale d’un carré ou d’un rectangle, on utilise le théorème de Pythagore.

Exemple : calcule la longueur de la diagonale de chacun des quadrilatères suivants :

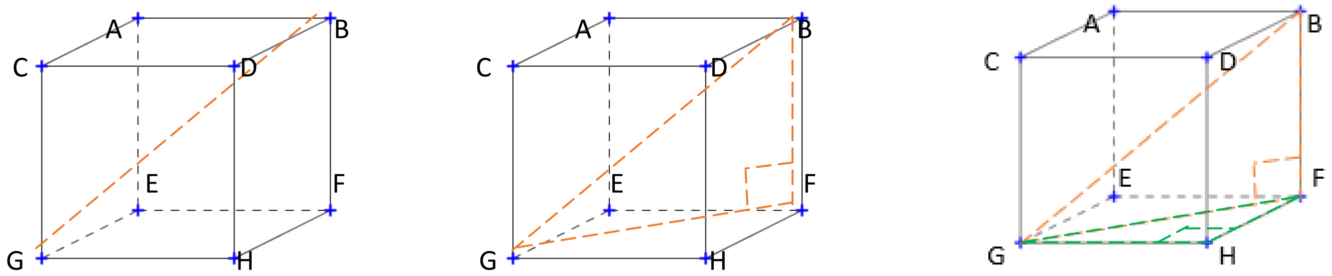




Le triangle ABC est rectangle en B donc j’utilise le théorème de Pythagore.
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$
$AC = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \boxed{3\sqrt{2}}$
Valeur approchée : $AC \approx$ 4,24cm.

Le triangle EFH est rectangle en E donc j’utilise le théorème de Pythagore.
$HF^2 = EH^2 + EF^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$
$\boxed{AC = \sqrt{58}}$
Valeur approchée : $AC \approx$ 7,62cm.

Maintenant : calculons la mesure de la diagonale du cube $ABDCEFHG$ qui mesure 5cm de côté.



Pour calculer la mesure de la diagonale BG il faut s’aider du triangle BFG rectangle en F (à l’intérieur du cube).
Pour connaitre la mesure GF il faut s’aider du triangle GHF rectangle en H (face de dessous).
Il y a donc deux étapes.

- étape 1 : le triangle GHF est rectangle en H donc je peux utiliser le théorème de Pythagore

$GF^2 = HF^2 + GH^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ j’ai $\boxed{GF^2 = 50}$.
Donc $GF = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

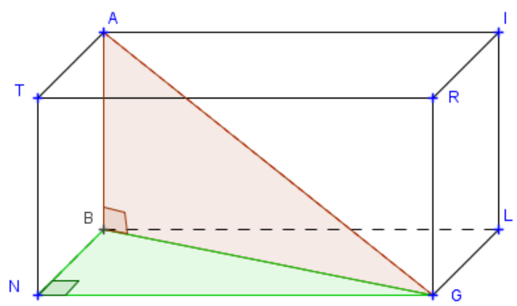
- étape 2 : le triangle GFB est rectangle en F donc je peux utiliser le théorème de Pythagore.

$GB^2 = GF^2 + BF^2 = 50 + 5^2 = 50 + 25 = 75$
Donc $GB = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$

Conclusion : la longueur de la diagonale GB est $5\sqrt{3}$cm, ce qui fait environ 8,66cm.

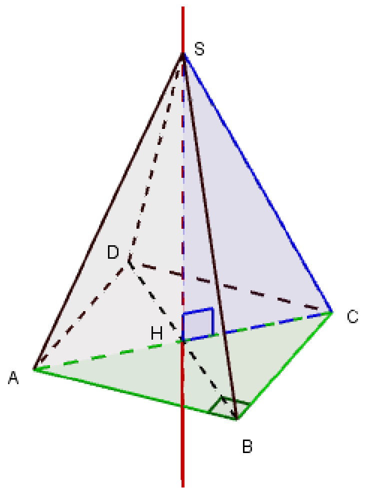
Maintenant : calculons la mesure de la diagonale AG du pavé droit $TRIANGLE$ représenté ci-contre qui mesure 5cm de longueur, 4cm de hauteur, et 2cm de profondeur.

Entraine toi davantage : amuse-toi à calculer des diagonales de solides qui ont une forme de pavé droit que tu trouves chez toi.



3°) Calcul de la longueur d'une arête dans une pyramide

Pyramide régulière à base carrée, dont la hauteur mesure 5cm et la base est un carré de 3 cm de côté.



Etape n°1 : je calcule la diagonale du carré de base.
Le triangle ABC est rectangle en C donc j'utilise le théorème de Pythagore.
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$
donc $AC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Etape n°2 : je calcule la moitié de la diagonale : $HC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

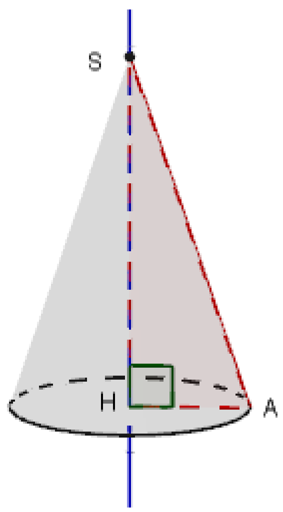
Etape n°3 : je calcule la mesure d'une arête de la pyramide :
Le triangle SHC est rectangle en H donc j'utilise le théorème de Pythagore.

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = 5^2 + \left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 = 25 + \frac{18}{4} = 25 + 4,5 = 29,5$$

donc $SC = \sqrt{29,5}$ cm.
La mesure d'une arete qui part du sommet dans la pyramide $SABCD$ est $\sqrt{29,5}$cm soit environ 5,43 cm.

Maintenant : calcule la mesure des arêtes d'une pyramide à base carrée si le coté du carré mesure 15cm et que la hauteur de la pyramide est 9cm.

4°) Calcul de la hauteur d'un cône



Le cône de révolution ci-contre a un rayon de base de 3,3cm et sa génératrice mesure 5,5cm. Calcule sa hauteur.

Le triangle SHA est rectangle en H donc j'utilise le théorème de Pythagore.
$SH^2 = SA^2 - HA^2 = 5,5^2 - 3,3^2 = 30,25 - 10,89 = 19,36$
Donc $SH = \sqrt{19,36} = 4,4$cm.

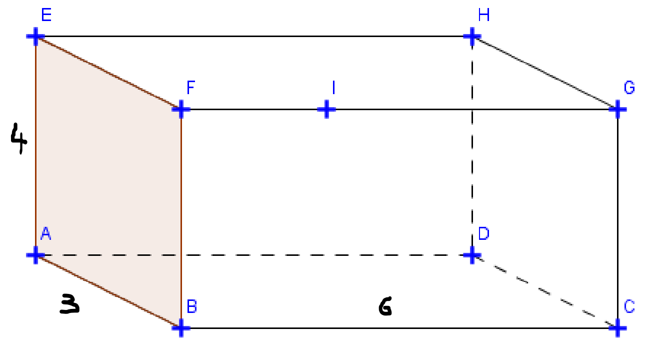
La hauteur de ce cône mesure donc 4,4cm.

5°) Sections planes de solides

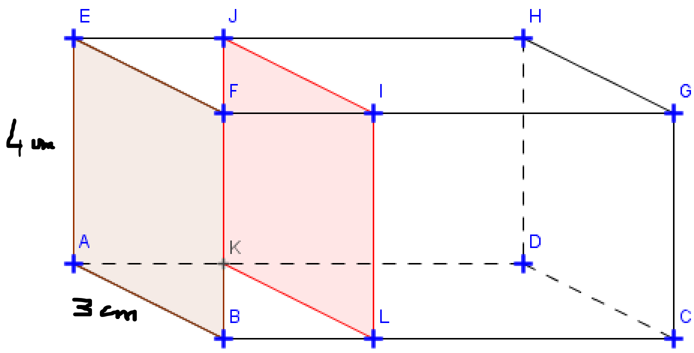
a. section d'un pavé droit parallèlement à une face.

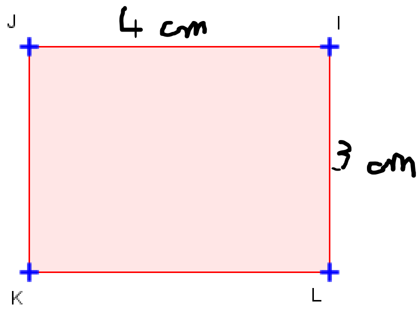
Si on réalise la section d'un pavé droit parallèlement à une de ses faces, on obtient un pavé droit. Le plan de section est un rectangle.

Exemple :

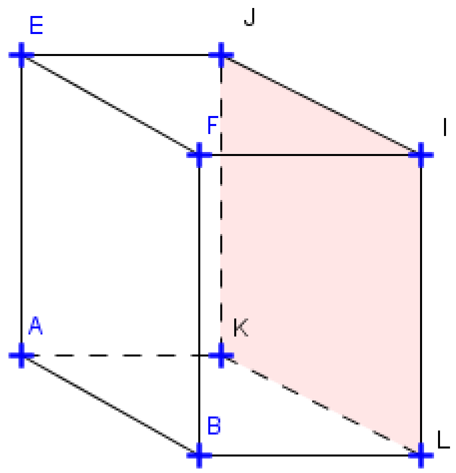


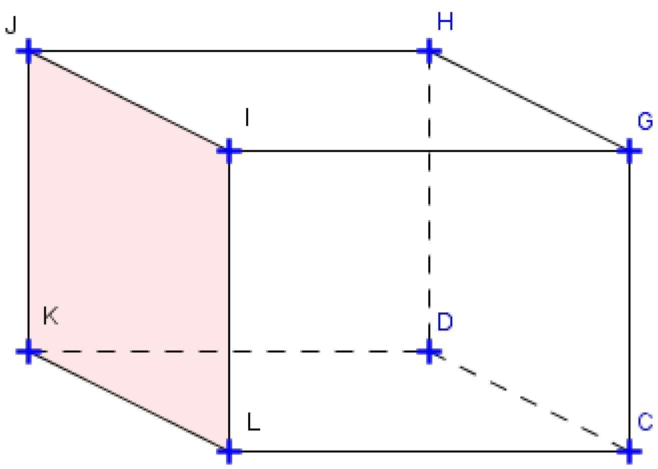
ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB=4cm, BC=6cm et FB=3cm et I est un point de l'arête [FG] tel que FI=2cm. On va réaliser la section du pavé droit parallèlement à la face ABFG.





Le plan de section est JIKL, la section obtenue est le pavé ABLKEFIJ ou le pavé KLCDJIGH.
Le plan de section est superposable à la face ABFE. En vraie grandeur, c'est un rectangle de dimensions 3cm et 4cm.





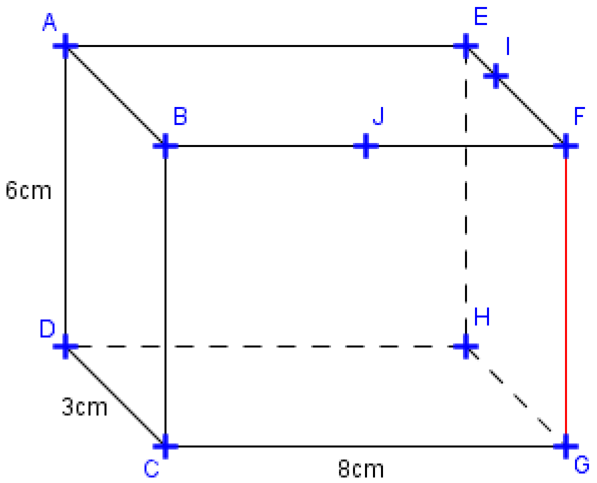
Sur les dessins au-dessus, le plan de section est représenté en rose. On a bien obtenu deux pavés droits.

b. section d’un pavé droit parallèlement à une arête.

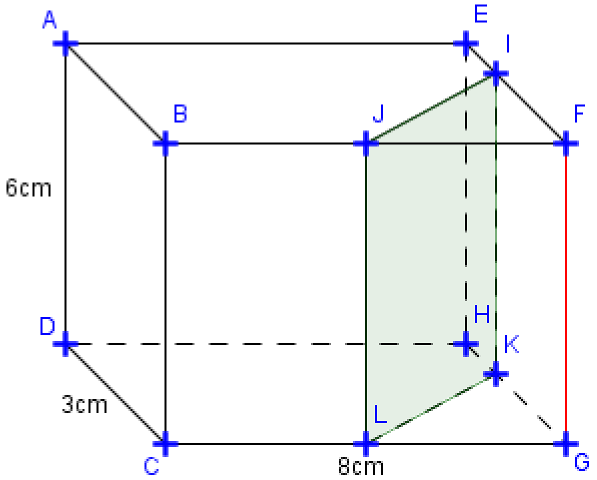
Remarque : nous aurons besoin ici d’utiliser le théorème de Pythagore.

Si on réalise la section d’un pavé droit parallèlement à une de ses faces, on peut obtenir un prisme droit.
Le plan de section est un rectangle.

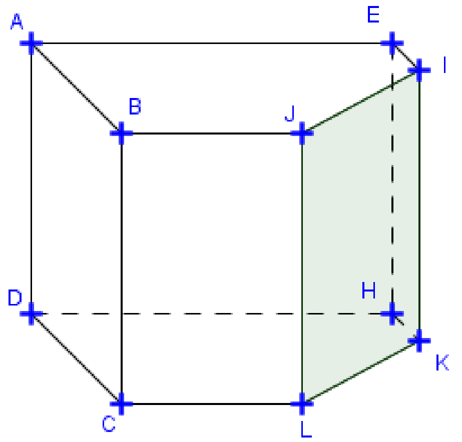
Exemple :

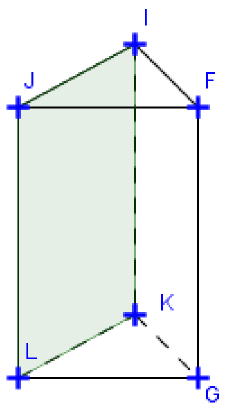


ABCDEFGH est un pavé droit.
I est un point sur [EF] tel que EI=1cm
J est le milieu de [BF].
On va réaliser la section du pavé droit par le plan passant par I et J parallèlement à l’arête [FG].



Je trace [IJ].
Du point I je descends parallèlement à (FG) pour faire le point L sur [CG].
Du point J je descends parallèlement à (FG) pour faire le point K sur [HG].
Je relie ensuite les points I, J, L, K, qui forment le plan de section IJLK.





La section obtenue est bien un prisme à base triangulaire.
Voici à quoi ressemble le solide une fois que l’on a retiré le prisme.

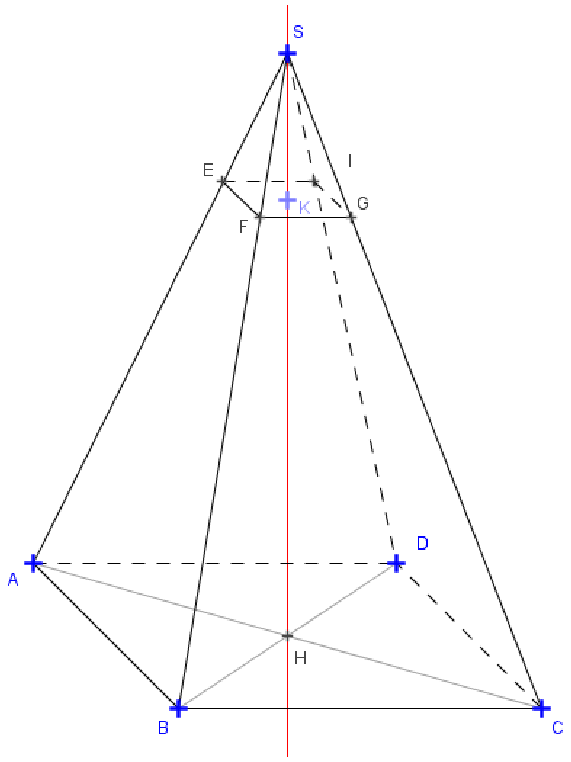
La nature de la section obtenue (le quadrilatère en vert) est un rectangle.
La hauteur de ce rectangle est égale à la hauteur du pavé droit, donc à 6cm.
Pour connaitre la mesure de la longueur du rectangle, il faut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle IFJ rectangle en F où l’on sait que IF=FB=2cm.
On pourra ensuite représenter le plan de section en vraie grandeur (rectangle de 6cm et environ 2,8cm)
Remarque : on pourrait aussi obtenir deux prismes droits à bases trapèzes rectangles, nous n’étudierons pas ce cas ici.

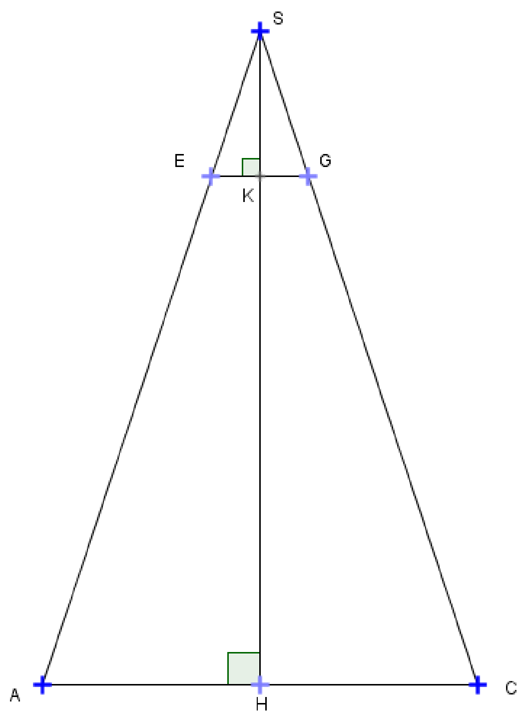
c. section d’une pyramide ou d’un cône de révolution parallèlement à la base

Remarque : nous aurons besoin ici d’utiliser le théorème de Thalès.

Si on réalise la section d’une pyramide (ou d’un cône de révolution), on obtiendra une pyramide de même nature, mais réduite, et une pyramide sectionnée.

Le plan de section est de même nature que la base (carré pour une pyramide à base carrée, cercle pour un cône de révolution, triangle pour une pyramide à base triangulaire).





Le plan de section de la pyramide est de la même nature que le plan de base :

ABCD est un carré de côté 5cm, EFGH est un carré réduit.

On donne : SH=8cm, SK=2cm.

a) Calcule la mesure de la diagonale AC.
b) Déduis-en la mesure de HC.
c) Calcule la mesure de KG.

Réponse a :

Le triangle ABC est rectangle en B, donc j’utilise le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ donc $AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$cm.

Réponse b :

H étant le milieu des diagonales, $HC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$cm.

Réponse c :

Dans le triangle SHC j’ai : K∈[SH], G∈[SG], les droites (KG) et (HC) sont parallèles. D’après le théorème de Thalès, j’ai :

$$\frac{SK}{SH} = \frac{SG}{SC} = \frac{KG}{HC} \quad donc \quad \frac{2}{8} = \frac{SG}{SC} = \frac{KG}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} \quad donc \quad KG = \frac{2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}88cm.$$